VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine 174

2666

NAZIONALE
B. Prov.
11
1155
NAPOLI
VITT. EM. III

B-Prov-
II
1155

Digitized by Google

610370

BIBLIOTECA NAZIONALE DI NAPOLI

GÉOMÉTRIE

DES

ÉCOLES PRIMAIRES,

COMPRENANT

LE DESSIN LINÉAIRE EXACT, LES PROJECTIONS,
LE LEVER DES PLANS DE TERRAINS ET DE BATIMENS,
L'ARPENTAGE, LE PARTAGE DES PROPRIÉTÉS,
LE JAUGEAGE ET LE CALCUL DES POIDS,

PAR

C.-L. BERGERY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'ARTILLERIE ET A L'ECOLE NORMALE DE METZ, MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT ET DE PLUSIEURS AUTRES SOCIÉTÉS SAVANTES.

Ouvrage approuvé de l'Université et adopté par le Ministre pour les écoles régimentaires.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE DE PLUSIEURS DÉMONSTRATIONS.

F.T

METZ.

Mme THIEL, LIBRAIRE, rue du Palais, n° 2.

PARIS,

BACHELIER, quai des Augustins, 55. | HACHETTE, rue Pierre-Sarazin, 12.
CHAMEROT, quai des Augustins, 13. | DELALIN, rue des Mathurins, 5.

1837.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Toute contrefaçon sera poursuivie.

Seront réputés contrefaits, les exemplaires qui ne porteront pas la signature de l'auteur.

METZ. — IMP. DE P. WITTERSHEIM.

A MESSIEURS

LES INSTITUTEURS PRIMAIRES.

Mes chers Collègues!

Vous remplissez dans l'état social une des plus belles fonctions du citoyen, celle de perfectionner l'homme en développant son intelligence; mais la lecture, l'écriture et le calcul, que vous enseignez avec succès, ne sont plus des moyens suffisans, pour le degré de civilisation où la France est parvenue. Il faut y joindre l'enseignement de la Géométrie qui donne des connaissances toujours et partout utiles, fait naître ou étend un ordre d'idées extrêmement fécondes, et communique ainsi à l'esprit une merveilleuse puissance.

Vous réussirez dans ce nouvel enseignement, comme dans les autres, parce qu'il est tout aussi facile, parce que nous naissons tous plus ou moins géomètres, parce que l'instituteur qui sait vouloir, peut tout apprendre et tout enseigner. Les succès des Cours industriels sont d'ailleurs la garantie des vôtres.

C'est pour vous aider que j'ai rédigé et que je vous offre ce petit ouvrage. Vous y trouverez une géométrie plutôt pratique que théorique: la connaissance des faits de la science et les moyens d'en faire l'application, m'ont paru suffire à vos élèves. Néanmoins, je n'ai pas négligé de leur donner des exemples de raisonnemens géométriques, toutes les fois que j'ai pu le faire avec une grande simplicité.

J'avais à ne pas perdre de vue que les enfans qui fréquentent les écoles primaires, sont en général très-jeunes et destinés, pour la plupart, aux honorables travaux de l'agriculture. J'espère avoir réussi à élaguer tout ce qui aurait été, pour eux, compliqué, difficile et peut utile; mais je crois qu'ils trouveront dans ce livre tout ce qu'il faut savoir pour faire, tant sur le terrain que sur le papier et sans aucun instrument cher, les opérations géométriques les plus usuelles et les plus importantes.

Si, contre mon attente, quelques articles renfermaient des difficultés trop grandes, même pour les bons calculateurs, ce serait vous, Messieurs, qui devriez remédier à

ce léger défaut de l'ouvrage, en formant deux classes de vos jeunes géomètres : il n'y aurait aucun inconvénient à réserver les points épineux pour la plus forte, ni même à les laisser entièrement de côté : mieux vaut savoir peu et bien, qu'apprendre beaucoup et mal. Soyez persuadés pourtant que toute idée, toute connaissance qui a pu entrer dans l'esprit d'un homme, peut, avec le temps et au moyen d'un nombre suffisant de répétitions, pénétrer aussi dans l'esprit le moins ouvert.

Courage, persévérance et dévouement, voilà tout ce que je vous suppose, en vous promettant un succès complet, et vous prouvez journellement qu'aucune de ces trois choses ne vous manque. Commencez donc avec confiance, et comptez sur la reconnaissance nationale : le jour ne peut-être loin où elle vous donnera la juste récompense de votre pénible et noble tâche.

BERGERY.

INSTRUCTION

SUR

LE DESSIN LINÉAIRE EXACT.

Il est indubitable que des opérations géométriques dont on se borne à suivre la description dans un livre et même sur une figure, ne se gravent jamais d'une manière durable dans l'esprit. Pour parvenir à les retenir, à les exécuter sûrement et avec facilité, il faut absolument en faire soi-même tous les détails, et plusieurs fois plutôt qu'une seule. C'est d'ailleurs en répétant souvent et manuellement l'application d'un principe, qu'on se le rend propre et qu'on le met au nombre de ces idées familières qui se présentent en quelque sorte d'elles-mêmes, dès que l'esprit en a besoin.

Les élèves d'un cours de Géométrie doivent donc, pour étudier cette science fructueusement, opérer sans cesse, comme font en arithmétique ceux qui veulent devenir habiles calculateurs. Jamais ils ne sauraient pratiquer la Géométrie ou en appliquer les principes, s'ils n'exécutaient pas eux-mêmes, sur le tableau noir et mieux encore sur le papier, tous les *tracés* qui leur sont enseignés.

L'exécution des tracés constitue en grande partie ce qu'on peut appeler le *Dessin linéaire exact*. Ce genre de dessin est facile, il faudrait même être bien malheureusement organisé, pour n'y pas réussir dès les premiers essais. Toutefois, une courte instruction propre à guider les commençans, ne peut que rendre leurs succès plus prompts et plus certains.

Le tableau noir doit être solidement fixé sur un mur et avoir 2 mètres en longueur, 1^m, 50 en largeur.

Fait en peuplier, il coûte à Metz, tout posé, 16^f.

Pour dessiner sur ce tableau, il faut :

Une règle longue de 1^m et large de $0^m,08$; prix : 1^f.

Une équerre de $0^m,2$ sur $0^m,15$; prix : $1^f,50$.

Un compas en noyer, long de $0^m,60$, dont une branche soit terminée par une pointe en fer et l'autre par un porte-crayon du même métal; prix : 6^f.

Il faut en outre des crayons de craie tendre, et une grosse éponge ou un linge pour effacer.

Les tracés faits sur le tableau sont d'autant moins inexacts, que les crayons sont plus fins; mais à raison de ce que la craie tendre ne peut former une pointe à la fois solide et fine, il y a impossibilité de mettre une grande précision dans de tels dessins. Aussi doivent-ils être considérés seulement comme des exercices propres à bien faire saisir les tracés et à donner le moyen de les exécuter aisément, avec exactitude, sur le papier.

Lorsqu'on veut unir à la craie et en suivant la règle, deux points ou marques faites sur le tableau, on doit placer cette règle à la même distance de ces deux points et l'en tenir écartée autant que l'exige la grosseur du crayon.

Pour dessiner sur le papier, il faut :

Une règle en bois dur, de 15 pouces; prix : 50 centimes.
Une équerre en bois dur, de 8 pouces sur 4 pouces; prix : 50 centimes.
Un double décimètre de *Kutsch*; prix : 70 centimes.
Un tire-ligne; prix : 2f. (Il peut être remplacé par une plume bien taillée en fin.)
Un compas à trois fins, de 4 pouces; prix : 5f.
Un crayon de mine de plomb; prix : 20 centimes.
Un morceau de gomme élastique; prix : 10 centimes.
Un morceau d'encre de Chine; prix : 20 centimes.

Prenez une feuille de papier entière et ouvrez-la. Sur la page de gauche, vous écrirez les énoncés des tracés et vous les numéroterez; sur la page de droite, vous ferez ces tracés et vous leur donnerez les mêmes numéros qu'aux énoncés correspondans. Rien autre chose que ces chiffres ne sera écrit sur le dessin.

Les tracés doivent être faits d'une telle dimension, que six au plus remplissent la page. Vous les exécuterez d'abord au crayon et légèrement; puis, vous *mettrez à l'encre* en suivant exactement les traits du crayon; enfin, vous effacerez avec la gomme élastique, les parties de ces traits que vous n'aurez pas dû couvrir d'encre.

C'est aussi en frottant le papier avec la gomme, qu'on le nettoie, quand la feuille de dessin est terminée. Si cette gomme se trouve trop dure pour bien enlever le crayon ou les souillures, on l'amollit soit en la chauffant, soit en la pétrissant entre les doigts.

Taillez le crayon en *langue de chat*, pour qu'il casse moins souvent et qu'il produise des lignes très-fines.

Marquez légèrement, avec une pointe de crayon ou de compas, les points que vous devrez unir par un trait.

Pour préparer l'encre, vous mettrez dans une soucoupe trois ou quatre gouttes d'eau et vous frotterez le morceau d'encre de chine sur le fond du vase, jusqu'au moment ou il formera un sillon qui permette d'apercevoir ce fond : alors seulement l'encre sera suffisamment noire.

Vous mettrez l'encre entre les *lèvres* du tire-ligne, au moyen d'une plume, après avoir desserré la vis qui unit ces lèvres. Quand vous aurez introduit trois ou quatre plumées d'encre, vous resserrerez la vis et vous essaierez l'instrument sur un morceau de papier, pour voir si les lignes qu'il tracera sont trop grosses ou trop fines.

Lorsqu'un tire-ligne qui contient de l'encre et qui n'est pas trop serré, vient à ne pouvoir plus marquer, il faut le passer légèrement sur le doigt, pour enlever l'encre sèche qui se trouve à l'extrémité du bec.

Le grand tire-ligne doit être tenu presque à plomb ; vous le pencherez seulement un peu vers la droite, en l'appuyant contre l'arête supérieure de la règle. Cette règle est conséquemment placée à une petite distance du trait au crayon qu'il s'agit de mettre à l'encre.

Le tire-ligne du compas doit avoir, en tournant, la même position que l'autre. Vous aurez soin de ne pas trop appuyer sur la *pointe sèche* qui reste fixe ; autrement, vous perceriez le papier.

Dès que vous n'aurez plus à vous servir d'un tire-ligne, vous l'essuierez en dedans, avec soin, pour prévenir la rouille. On peut toujours éviter de mettre de l'encre en dehors ; mais lorsqu'il y en a, il faut l'enlever, après l'avoir mouillée un peu, si elle est sèche.

Un dessin dépourvu d'explication doit se faire comprendre par lui-même. Pour qu'il en soit ainsi :

Les lignes données, droites ou courbes, sont très-fines et continues, comme celle-ci ———————.

Les lignes de résultat, droites ou courbes, sont un peu moins fines et continues, comme celle-ci ———————.

Les lignes de construction, c'est-à-dire toutes les autres, droites ou courbes, sont très-fines et coupées par des intervalles, comme celle-ci — — — — — — — . Lorsqu'elles se trou-

vent en grand nombre, on distingue celles d'une opération de celles d'une autre, en mettant un, deux, trois points dans les intervalles.

Exemples : —·—·—, —··—··—··—, —···—···—···—.

Les parties d'une ligne coupée doivent être à-peu-près égales entre elles; les intervalles blancs doivent être très-petits et aussi à-peu-près égaux entre eux.

Il importe de s'exercer beaucoup au tracé de ces différentes sortes de lignes, soit avec le grand tire-ligne ou la plume, soit avec le compas; c'est le seul moyen de parvenir promptement à dessiner vîte et bien.

On relève beaucoup un dessin, quand on entoure la feuille, d'un cadre composé de deux traits, l'un intérieur et fin, l'autre extérieur et large; mais l'éxécution d'un pareil cadre coûte beaucoup de temps, et mieux vaut s'en abstenir.

SIGNES D'ABRÉVIATION.

+ remplace le mot *plus*.

— remplace le mot *moins*.

= remplace le mot *égale*.

× remplace les mots *multiplié par*.

5 : et $\frac{5}{3}$ signifient également 5 *divisé par* 3.

(19) signifie qu'il faut relire tout le 19e article.

(P. II, F. 15) signifie qu'il faut avoir sous les yeux la 15e *figure* de la 2e *planche*.

GÉOMÉTRIE

DES

ÉCOLES PRIMAIRES.

LIGNES ET ARÊTES DES CORPS.

La Géométrie enseigne à tracer des traits fins appelés *lignes*, dont la forme et la position sont indiquées; à représenter exactement, sur un tableau, un *corps* quelconque, c'est-à-dire toute chose qu'on peut toucher; à comparer et à mesurer les corps, leurs faces, les lignes et les arêtes qui s'y trouvent.

LIGNE DROITE.

1. Une ligne est *droite*, quand elle peut se confondre avec une des arêtes d'une bonne règle; elle est *courbe*, lorsqu'elle ne le peut pas.

Rien ne paraît plus facile que de *tracer une ligne droite*. Il ne s'agit en effet que d'appliquer une règle sur une des faces d'un corps et de faire glisser un crayon, une pointe à tracer, le long de l'une des deux grandes arêtes qui touchent cette face; mais, il faut avoir bien soin de maintenir la règle toujours dans la même position, de n'en jamais écarter le crayon ou la pointe, et c'est à quoi l'on ne réussit qu'après s'être exercé.

Si vous devez unir par une droite deux *points* donnés, c'est-à-dire deux marques faites par deux piqûres d'une *pointe* très-fine, il faut placer la règle de manière que l'une de ses grandes arêtes soit tout contre les deux points.

La droite ainsi tracée entre deux points *est le plus court chemin* pour aller de l'un à l'autre; sa longueur donne, par conséquent, *la vraie distance* qui sépare ces points.

Moins les points sont gros, et plus il y a d'exactitude dans les tracés. Vous sentez, en effet, que s'il s'agit de prendre, avec un compas, l'écartement de deux points un peu gros, il est impossible de savoir précisément où doivent être posées les pointes, et qu'on ne sait pas davantage comment placer la règle, quand il faut unir ces points par une droite. Vous devez donc chercher, en traçant soit sur

le papier, soit sur d'autres corps, à faire des points aussi petits et des lignes aussi fines qu'il est possible.

Les planches jointes à ce livre montrent que les différentes parties d'une *figure* géométrique se distinguent au moyen des lettres de l'alphabet. Un point est toujours désigné par une seule lettre ; ainsi l'on dit : le point A, le point B, le point C (P. I, F. 1). Toute droite est désignée par deux lettres qu'on place ordinairement aux extrémités, mais qui peuvent aussi être mises ailleurs ; ainsi l'on dit, à volonté : la droite AB ou la droite AC.

2. Les règles sont souvent mal faites, ou bien avec le temps elles se courbent. Pour *vérifier une règle*, il faut en vérifier chacune des 4 longues arêtes. Tracez une ligne le long d'une de ces arêtes ; retournez ensuite la règle bout pour bout, et présentez à la ligne, l'arête qu'a suivie le crayon. Si cette ligne en est recouverte dans toute sa longueur, elle est droite et l'arête est juste. Quelque courte que soit une partie non recouverte, l'arête est fausse, et il faut la marquer, pour éviter de s'en servir.

3. Certains travaux nécessitent des droites d'une telle longueur, qu'on ne peut employer une règle pour les tracer. Les jardiniers, les terrassiers, les maçons, etc., font usage d'un cordeau attaché à deux piquets ou à deux pierres. Ils doivent observer que si le cordeau ne repose pas, dans toute sa longueur, sur la face *réglée* d'un corps, c'est-à-dire sur une face où la règle puisse s'appliquer d'un bout à l'autre, ils n'ont point et ne peuvent jamais avoir une véritable droite. Effectivement, le poids du cordeau le rend courbe et d'autant plus courbe qu'il est plus considérable. Mais plus on tend fortement, et plus on diminue la courbure.

Les charpentiers se servent aussi d'un cordeau pour tracer de longues droites. Ils le frottent avec du blanc d'Espagne, de l'ocre, du noir de fumée delayé dans de l'huile, l'appliquent sur deux points de la droite à tracer, le tendent fortement, le pincent pour l'élever au-dessus de la pièce de bois, en maintenant les deux bouts, puis enfin le laissent retomber. Mais l'empreinte qu'il forme en frappant la pièce, n'est rigoureusement une droite que dans le cas où il a été élevé dans l'aplomb de sa première position.

Ceux qui arpentent ou qui lèvent des plans, marquent seulement les extrémités des droites. Ces droites n'en sont pas moins bien déterminées : on peut, en plaçant l'œil dans

l'alignement des deux points extrêmes, faire planter sur chacune, bien qu'elle ne soit pas tracée, autant de piquets ou de jalons qu'il en est besoin.

CERCLE.

4. Parmi toutes les lignes courbes, il en est une qu'on appelle indifféremment *cercle* ou *circonférence*.

Tracer un cercle.

Sur le papier ou sur un tableau, appuyez légèrement l'une des pointes d'un compas ouvert, et faites tourner l'autre pointe autour de celle-là, de manière qu'elle marque sa trace. Cette trace sera un cercle.

Sur le terrain, vous pouvez employer une grande perche, percée à l'un de ses bouts. Vous introduirez une pointe dans le trou et vous enfoncerez cette pointe dans le sol, ou bien vous la ferez maintenir dans une position fixe, par un aide; puis, vous appliquerez une pointe à tracer contre la perche, et saisissant ces deux objets d'une seule main, de manière à rendre invariable le point où ils se toucheront, vous les ferez tourner autour du pivot.

Si le cercle à tracer est trop grand pour que vous puissiez employer une perche, vous aurez recours au cordeau. Il doit être bouclé à chaque extrémité. Dans l'une des boucles, vous engagerez la pointe fixe; dans l'autre, la pointe traçante, et au moyen de cette dernière, vous ferez tourner le cordeau, en le tirant de manière qu'il soit toujours à-peu-près également tendu.

5. Le point A marqué par la pointe fixe (P. I, F. 2), est le *centre* du cercle.

On désigne souvent un cercle par ce seul point, en disant le *cercle A*.

Toute droite AB tirée du centre jusqu'à un point quelconque de la courbe, est appelée *rayon* du cercle. Toute droite CD tirée d'un point de la circonférence à un autre, est une *corde*, et la partie du cercle comprise entre les deux points C, D, soit d'un côté de la corde, soit de l'autre, est un *arc*.

Toute droite BC menée d'un point de la courbe à un autre et passant par le centre, est nommée *diamètre* du cercle. Un diamètre est aussi une corde, mais il est plus grand que toute autre corde qui ne passe pas par le centre.

Tous les rayons d'un cercle sont égaux, car il résulte du tracé, qu'il faut, pour prendre la longueur d'un rayon

quelconque, la même ouverture de compas que pour prendre celle de chacun des autres.

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux, car chacun vaut deux rayons. Le diamètre BC, par exemple, est la somme des rayons AB et AC.

De ce que tous les rayons sont égaux, il suit que *tous les points du cercle sont également éloignés du centre.* Par conséquent, *le cercle tracé autour d'un point pris pour centre, est le lieu où se trouvent tous les points également éloignés du premier.*

Si, par exemple, vous voulez marquer plusieurs points situés à 3 mètres d'un point A, vous décrirez un cercle autour de ce point A pris pour centre, avec une perche ou un cordeau de 3 mètres, c'est-à-dire en maintenant la pointe traçante à 3 mètres de la pointe fixe, et tous les points que vous marquerez sur ce cercle, seront à 3 mètres de A.

6. *Trouver un point qui soit à 3 mètres d'un point A et à 2^{m} d'un point B* (P. I, F. 3).

Vous décrirez un cercle de 3^{m} de rayon, autour de A, et un cercle de 2^{m} de rayon, autour de B. Ces deux cercles se couperont en deux points C, D. Le point C étant sur le grand cercle, se trouvera à 3^{m} de A; étant sur le petit cercle, il se trouvera à 2^{m} de B, et il en sera de même du point D. Le problème a donc deux solutions. Vous prendrez celle du point C, si le point demandé doit être au-delà de la ligne droite AB; vous prendrez celle du point D, si le point demandé doit être en deça de AB. Lorsque aucune de ces conditions ne sera imposée, vous prendrez indifféremment l'un ou l'autre des deux points C, D.

7. Les deux exemples précédens vous montrent que, pour *décrire un cercle dont le rayon est donné*, il faut mettre et maintenir entre la pointe traçante et la pointe fixe, une distance égale à la longueur du rayon.

Si c'est le diamètre qui est connu, on en prend la moitié pour avoir le rayon. Qu'on ait, par exemple, à tracer un cercle dont le diamètre soit 1^{m},50, on emploiera un rayon de 0^{m},75 moitié de 1^{m},50.

COMPARAISON DES CERCLES ET DE LEURS ARCS.

8. Il n'est pas nécessaire de mesurer le contour des cercles pour les comparer; il suffit de mesurer leurs rayons ou leurs diamètres. Si le rayon d'un cercle est le tiers, la

moitié, le double, le triple, le quadruple, etc., du rayon d'un autre, le contour du premier cercle sera le tiers, la moitié, le double, le triple, le quadruple, etc., de celui du second. Il en est de même pour les diamètres. C'est ce qui fait dire que *deux circonférences se contiennent comme leurs rayons ou comme leurs diamètres.*

9. *Combien une circonférence dont le diamètre est de 75 centimètres, contient-elle de fois une circonférence dont le diamètre est de 15 centimètres?*

Pour répondre à cette question, je cherche combien de fois 75 contient 15, c'est-à-dire que je divise 75 par 15. Le quotient 5 m'apprend que le contour du grand cercle vaut 5 fois le contour du petit.

10. *La piste du manége d'un huilier a* 2^m *de rayon; il la trouve trop courte et veut l'augmenter d'un quart. A quelle distance du pivot doit-il atteler son cheval?*

Puisque la grande circonférence surpassera la petite de $\frac{1}{4}$, son rayon doit surpasser de $\frac{1}{4}$ le rayon donné; la longueur du nouveau rayon sera donc 2 mètres, plus le quart de 2^m, c'est-à-dire 2^m plus $0^m,5$ ou $2^m,5$.

11. *Lorsque deux roues dentées engrènent l'une sur l'autre, les nombres de tours qu'elles font dans le même tems, se contiennent à l'inverse des rayons.*

Il est clair d'abord que les nombres de tours sont inverses des circonférences: la petite roue appliquant successivement tous ses points sur la grande, doit faire d'autant plus de tours, contre un seul de celle-ci, que sa circonférence est moindre ou contenue plus de fois dans l'autre. Si, par exemple, le pourtour de la grande roue vaut 2 fois, 3 fois celui de la petite, cette dernière fera 2 tours, 3 tours, pendant que la première en fera un. Si l'une des roues a 3 mètres de circonférence et l'autre 7^m, la petite sera contenue $7/3$ de fois dans la grande et fera $7/3$ de tours, pendant que l'autre en fera un, ou 7 tours contre 3. Mais, puisque les circonférences se contiennent comme 3 et 7, il en est de même des rayons (8). Donc, lorsque les rayons se contiennent comme 3 et 7, les nombres de tours respectifs se contiennent à l'inverse, comme 7 et 3.

Le rayon d'une roue est les $2/3$ *de celui d'une autre avec laquelle elle engrène; combien fait-elle de tours, pendant que la grande en fait un?*

Les rayons se contiennent comme 2 et 3; par conséquent,

les nombres de tours respectifs doivent se contenir comme 3 et 2. La petite roue fera donc 3 tours, pendant que la grande en fera 2, ou $^3/_2$ tours contre 1, ou 1 tour $^1/_2$ contre 1.

12. *On veut qu'une roue qui doit engrener avec une autre, fasse 2 tours, pendant que cette autre en fera 3; quel doit être le rayon de la première, par rapport à celui de la seconde?*

Puisque les nombres de tours se contiennent comme 2 et 3, les rayons doivent se contenir comme 3 et 2 (11). Conséquemment, le rayon de la grande roue sera les $^3/_2$ du rayon de la petite ou le surpassera d'une moitié.

13. *Tracer un cercle qui soit égal à un autre.*

Il suffit de prendre le même rayon; car des circonférences qui ont des rayons égaux se contiennent une fois ou sont égales (8).

14. *De deux arcs situés sur le même cercle ou sur des cercles égaux, le plus grand contient l'autre autant de fois qu'il peut en recevoir la corde.*

Ainsi, l'arc ABD est triple de l'arc EFG (P. I, F. 4), parce que la corde EG du second peut être reçue 3 fois par le premier : une fois de A en B, une fois de B en C et une fois de C en D. On dit aussi dans un tel cas, que la corde EG peut être *portée* 3 fois sur l'arc ABD.

Remarquez que 3 lettres sont employées pour désigner un arc. Si l'on disait l'arc AD, la personne qui écouterait ou qui lirait, ne saurait pas s'il s'agit de l'arc ABD ou de l'arc AFD. Quelquefois cependant, on ne se sert que de deux lettres pour nommer un arc; mais il est convenu qu'on veut parler alors du plus petit des deux qui ont la même corde. En disant donc l'arc EG, ce n'est pas le grand arc EBG qu'on indique; c'est le petit EFG.

Lorsque des arcs appartiennent à des cercles inégaux, on ne peut les comparer qu'après les avoir mesurés.

Il faut bien se garder de croire que les arcs d'un même cercle ou de cercles égaux, se contiennent autant de fois que leurs cordes; ce serait une très-grave erreur. La corde AD de l'arc ABD n'est pas triple de la corde EG de l'arc EFG, quoique le premier arc soit triple du second. En effet, la ligne brisée ABCD, formée de trois lignes droites, est triple de la corde EG : on l'a faite telle; et cette ligne brisée est plus longue que la ligne droite AD qui a les mêmes extrémités A et D (1).

15. Il suit de ce qui précède que *deux arcs qui ont des cordes égales, sont égaux, s'ils se trouvent sur le même cercle, ou sur des cercles de même rayon*, et s'ils sont chacun le plus petit ou le plus grand des deux arcs qui ont la même corde.

Réciproquement, *sur le même cercle ou sur des cercles de même rayon, les cordes sont égales, quand les arcs sont égaux.* Mais observez bien que c'est seulement dans le cas de l'égalité, que les arcs se contiennent comme les cordes.

Soient les deux cercles A,B de même rayon (P. I, F. 5). Si les cordes CD, EF sont égales, les deux petits arcs CGD, EHF sont de même longueur, ainsi que les deux grands arcs CID, EKF. Réciproquement, il suffit qu'on ait reconnu que les arcs CGD, EHF sont égaux, pour être sûr que les cordes CD, EF ont une même longueur.

16. *Marquer, sur un cercle A, un arc égal à un autre BCD, situé sur le même cercle* (P. I, F. 6).

Je prends, avec un compas, la longueur de la corde qui joindrait le point B au point D; je porte cette longueur de E en F, par exemple, et j'ai l'arc EGF qui est égal à l'arc BCD.

17. *Marquer, à partir d'un point A, un arc qui soit quadruple d'un autre BCD* (P. I, F. 7).

Je prends, avec un compas, la corde de BCD; je la porte 4 fois de A en E, et j'ai l'arc AFE qui contient 4 fois l'arc BCD ou qui en est le quadruple.

18. Une même corde peut toujours être portée deux fois dans un cercle, à partir du même point, et donner ainsi deux arcs égaux qui aient une extrémité commune. Par exemple, la corde AB (P. I, F. 8) peut être portée de A en C et fournir l'arc ADC égal à l'arc AEB. Mais il n'en est pas de même du diamètre AF; il est impossible de porter cette longueur, de A en un point du cercle qui soit autre que le point F. Il faut en conclure que les deux arcs ADF, AEF formés par le diamètre AF sont égaux. Par conséquent, *tout diamètre partage le cercle en deux arcs égaux, et chacun de ces arcs est la moitié de la circonférence.*

MESURAGE DU CERCLE, DES ARCS ET DU DIAMÈTRE.

19. *Mesurer une circonférence.*

Si vous pouvez l'entourer d'une ficelle, vous le ferez,

et il ne s'agira que de mesurer la longueur de cette ficelle, pour avoir celle de la ligne courbe. Mais observez qu'il faut employer une ficelle molle, peu torse, peu susceptible de s'étendre, quand on la tire par les deux bouts : autrement, la longueur trouvée pourrait n'être point la véritable.

Si vous ne pouvez vous servir de ce moyen, *mesurez le diamètre et multipliez-le par* 3,1416. Le produit vous donnera la longueur de la circonférence, à fort peu près. Représentant cette longueur par C et le diamètre par D, on a pour *formule* $C=D\times3,1416$.

Supposons que le diamètre ait été trouvé de 5 mètres ; la formule donnera $C=5^m\times3,1416=15^m,708$. Si vous vous contentiez de tripler le diamètre, comme font quelques personnes, vous trouveriez 15^m, longueur beaucoup trop petite, et si vous y ajoutiez un septième du diamètre, comme font d'autres personnes, vous obtiendriez $15^m,714$, résultat trop grand de 6 millimètres au moins.

On se rappelle assez facilement le nombre 3,1416, lorsqu'on s'habitue à le prononcer par parties, à dire 3....14....16. Il faut se contenter du degré d'exactitude qu'il donne, car le résultat $15^m,708$ n'excède pas de 4 centmillièmes de mètre la vraie longueur de la circonférence dont le diamètre est 5 mètres, et l'on ne peut obtenir rigoureusement la mesure d'aucune circonférence.

20. *Mesurer un arc de cercle.*

Si l'on peut appliquer une ficelle d'un bout à l'autre de l'arc, on en obtient la longueur en mesurant celle de la ficelle.

Quand il est impossible de procéder ainsi, il faut connaître combien de fois l'arc est contenu dans la circonférence. En est-il le tiers, le quart, les $\frac{2}{5}$, etc.? On mesure la circonférence et l'on prend le tiers, le quart, les $\frac{2}{5}$ de la longueur de cette courbe, pour avoir la longueur de l'arc.

Voici maintenant comment vous pourrez *trouver combien un arc ABC est contenu de fois dans la circonférence* (P. I, F. 9).

Prenez la corde de ABC et portez-la autant de fois qu'il sera possible sur la circonférence, 6 fois par exemple, de A en D ; prenez ensuite la corde du reste DA et portez-la sur l'arc ABC ; elle y sera reçue, je suppose, 2 fois de A en E. Prenez alors la corde du reste EC et portez-la sur le petit arc DA. Si vous trouvez qu'elle y est reçue 3 fois tout juste, par exemple, l'arc EC sera la commune mesure de la circonférence et de l'arc AC.

Dites-donc : puisque DA=3EC et que ABC=2DA+EC, il est clair que ABC=6EC+EC ou 7 EC ; puisque la circonférence=6ABC+DA, il est clair que cette circonférence =42EC+3EC ou 45EC. Ainsi, ABC contient 7 fois l'unité de mesure EC, et la circonférence la contient 45 fois ; l'arc ABC est donc les $\frac{7}{45}$ de la circonférence.

Au reste, pour plus de simplicité, écrivez tous les quotiens, 6, 2, 3, au-dessous les uns des autres dans l'ordre où vous les trouvez ; mettez l'unité vis-à-vis de 3 le dernier et ce dernier vis-à-vis de 2 l'avant-dernier ; multipliez celui-ci 2, par le nombre 3 qui est sur sa ligne, vous aurez 6 ; ajoutez au produit, le nombre 1 qui est au-dessous du multiplicateur 3, vous aurez 7 ; écrivez ce résultat vis-à-vis du quotient 6 suivant, en remontant ; multipliez ce quotient par le nombre 7 qui est sur sa ligne, vous trouverez 42 ; ajoutez à ce produit, le nombre 3 qui est sous le multiplicateur 7, vous obtiendrez 45 que vous écrirez au-dessus du 7. Renversez ces deux derniers nombres et séparez-les par un trait, vous aurez enfin la fraction $\frac{7}{45}$ qui exprimera combien de fois l'arc ABC est contenu dans la circonférence entière.

	45
6	7
2	3
3	1

C'est encore ainsi qu'il faut opérer, si l'on veut *trouver le nombre de fois qu'une ligne droite en contient une autre, lorsque ce nombre n'est pas entier.*

21. *Mesurer le diamètre de la circonférence intérieure d'une tour* (P. I, F. 10).

Si l'on peut opérer librement dans la tour, vous ferez maintenir en un point A, le bout d'une règle terminée en biseau ; vous placerez une seconde règle contre celle-là, de manière à former une ligne droite avec l'arête qui aboutit en A, et vous ferez pivoter ce système autour de A jusqu'à ce que le bout B de la 2e règle, terminée aussi en biseau, ne puisse plus s'éloigner du pivot. Quand le système aura cette position, qu'il ne pourrait quitter sans que la distance AB diminuât, la droite AB sera dirigée selon un diamètre, puisque le diamètre est la plus grande de toutes les cordes (5). Il suffira donc alors de mesurer AB pour connaître le diamètre cherché.

C'est ainsi qu'il faut s'y prendre, pour mesurer le diamètre de toute circonférence dans l'intérieur de laquelle on peut opérer.

Si l'intérieur n'est pas libre, on cherche le diamètre de

la circonférence extérieure de la tour et l'on en retranche le double de l'épaisseur EF du mur, prise dans l'embrasure d'une porte ou d'une fenêtre ; car AB est égal à CD diminué de AC et de BD. Mais observez que pour avoir la véritable épaisseur du mur, il faut la mesurer dans la direction d'un rayon. Ce n'est donc pas sur les faces GH d'une porte ou d'une fenêtre, qu'on doit prendre la mesure de l'épaisseur d'un mur en tour ronde, puisque ces faces ne sont pas dirigées vers le centre; c'est sur la droite EF qui est également distante de l'une et de l'autre.

22. *Mesurer le diamètre de la circonférence extérieure d'une tour* (P. I, F. 10).

Si vous pouvez mesurer le diamètre AB de la circonférence intérieure, vous n'aurez qu'à y ajouter le double de l'épaisseur EF du mur, pour avoir CD le diamètre cherché.

Si vous ne pouvez pas mesurer AB, vous mesurerez la circonférence extérieure (19) et vous diviserez sa longueur par le nombre 3,1416. Le quotient différera extrêmement peu du diamètre demandé. La formule est $D=\frac{C}{3,1416}$, D représentant le diamètre et C la longueur de la circonférence.

On se contente quelquefois de prendre, pour longueur du diamètre, le tiers de la circonférence; mais le résultat est beaucoup trop grand. D'autrefois on multiplie la circonférence par 7 et l'on divise le produit par 22; mais le quotient, moindre que celui qui résulte du diviseur 3,1416 est trop petit.

Lorsqu'il sera impossible de mesurer directement la circonférence de la tour, vous tracerez une droite AB à une petite distance (P. I, F. 11), puis vous placerez une règle qui soit d'équerre sur AB et touche le mur rond. Ayant marqué le point C où AB sera coupée par la règle, vous transporterez cette règle de l'autre côté et la placerez de la même manière, ce qui donnera un deuxième point D. La longueur de la droite CD sera exactement celle du diamètre cherché.

C'est ainsi qu'il faut mesurer le diamètre de toute circonférence dont on ne peut prendre le tour ou dans l'intérieur de laquelle il n'est pas possible d'opérer.

Au lieu d'employer une règle et de la placer à l'équerre, ce qui n'est pas toujours facile sur le terrain, on peut se servir du système de deux cordes que représente la figure 12 (P. I). La partie EF renferme trois unités de longueur,

comme trois pieds, 3 décimètres, 3 mètres, etc.; la partie EG renferme 4 unités de même espèce que celles de EF, et FG en contient 5. Quand le système est placé de façon que ses trois parties se trouvent bien tendues, la figure FEG est absolument celle d'une équerre, et parconséquent, la droite EI est d'équerre sur EH.

Pour appliquer le *cordeau-équerre* au mesurage du diamètre d'une tour, vous le placerez de telle sorte que le cordon EH couvre une partie de la droite AB (F. 11) et qu'en même temps le cordon EI, tendue en ligne droite, comme EH, FG, touche le mur rond; puis vous marquerez le point C de AB, sur lequel se trouvera le coude E de la corde HEI. Opérant de la même manière, de l'autre côté de la tour, vous déterminerez le point D de AB.

ANGLES.

23. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point; on appelle ce point leur *intersection*.

Deux droites AB, BC qui se rencontrent en un point B (P. I, F. 13), laissent entre elles un espace qu'on nomme *angle*. AB et BC sont les *côtés* de cet angle; le point B en est le *sommet*.

Il suffit de trois points pour désigner un angle : celui du sommet et deux autres pris sur les côtés. Ainsi, l'on dit : l'angle ABC, mettant la lettre du sommet entre les deux autres. Quelquefois aussi l'angle est désigné par la seule lettre du sommet, et l'on dit : l'angle B; mais il faut pour cela que ce sommet ne soit pas commun à plusieurs angles.

De même qu'il suffit d'une petite partie d'une droite, pour qu'on puisse la continuer jusqu'à une distance quelconque (3), il suffit aussi d'une petite partie de l'angle pour qu'on puisse lui donner telle étendue qui sera assignée : toute l'opération consiste à prolonger les côtés. Un angle est donc réellement un espace sans limite, et néanmoins il est toujours suffisamment indiqué par la partie qui avoisine le sommet. Aussi se contente-t-on d'*amorcer*, pour ainsi dire, comme dans la figure 13, les angles qu'il faut représenter.

24. *Transporter sur la face d'une pierre de taille, l'angle ABC que forment les fondations de deux murs* (P. I, F. 14).

On emploie pour cela une *fausse-équerre*. Cet instrument est composé de deux règles unies par une char-

nière; celle du tailleur de pierres a des pointes, pour qu'elle puisse servir de compas.

Vous ouvrirez la fausse-équerre, puis vous la placerez de manière que l'une des arêtes intérieures se confonde avec l'arête AB d'un des murs, et qu'en même temps l'autre arête intérieure couvre l'arête BC de l'autre mur. Alors, l'angle ABC sera *levé*, ou *relevé*, comme disent les ouvriers, c'est-à-dire que les deux règles de l'instrument feront entre elles le même angle que les arêtes des murs. Ensuite, sans altérer l'écartement de ces deux règles, vous les placerez sur la face de la pierre de taille, de façon qu'une des arêtes intérieures couvre une arête de la pierre, et avec une pointe à tracer, vous tirerez une droite le long de l'autre arête intérieure. Cette droite fera évidemment, avec le bord de la pierre, l'angle ABC.

Ce procédé convient à tous les cas où il faut transporter un angle d'un lieu dans un autre.

COMPARAISON DES ANGLES.

25. Vous pouvez concevoir aisément que le côté AB de l'angle ABC (P. I, F. 15) ait d'abord été appliqué sur le côté BC, et qu'ensuite il se soit écarté de cette droite, en tournant autour du point B, jusqu'à ce qu'il ait eu atteint la position que vous lui voyez dans la figure, ou jusqu'à ce qu'il ait eu formé l'angle ABC. Ce mouvement étant le même que celui de la perche qu'on emploie pour tracer un cercle (4), il est clair que l'extrémité A de AB n'a pu passer de C en A, sans décrire un arc de cercle CA dont B est le centre. Il est clair aussi que si l'angle ABC augmente ou diminue, c'est-à-dire si AB s'éloigne ou se rapproche de BC, l'arc augmentera ou diminuera.

Cette dépendance constante dans laquelle l'arc et l'angle sont l'un de l'autre, fait qu'on peut se servir pour désigner, pour *indiquer* un angle, de l'arc décrit entre les côtés et du sommet comme centre. Mais observez bien qu'un arc qui se trouve entre les côtés d'un angle, n'est plus l'*indication* de cet angle, s'il n'a pas le sommet pour centre.

26. *Deux angles se contiennent comme leurs arcs d'indication de même rayon.*

Il n'est donc pas nécessaire de mesurer les angles pour les comparer; l'opération revient à la comparaison d'arcs de cercle.

Combien de fois l'angle ABC contient-il l'angle DEF, (P. I, F. 15)?

Avec une ouverture de compas arbitraire, je décris du sommet B, un arc AC, entre les côtés de l'angle ABC, et avec la même ouverture, je décris du sommet E, un arc DF, entre les côtés de l'angle DEF. Je cherche ensuite combien de fois l'arc DF est contenu dans l'arc AC (20), et si je trouve qu'il y est contenu 4 fois, par exemple, j'en conclus que l'angle ABC est quadruple de l'angle DEF.

27. Il suit de là que *si les arcs d'indication ont même longueur ou même corde, les angles sont égaux;* car ces angles se contiennent une fois, comme les arcs (15).

On veut tracer une allée dont un côté aboutisse au point A et fasse, avec la direction AB d'une haie, le même angle que le côté BC d'une autre allée (P. I, F. 16).

Du point B sommet de l'angle donné ABC, je décris, avec une ouverture de compas arbitraire, un arc DE compris entre les côtés de cet angle. Du point A et avec la même ouverture, je décris un second arc FG qui soit visiblement plus grand que le premier. Je prends ensuite la corde de DE, et du point F, avec cette corde pour rayon, je décris un tout petit arc qui coupe FG quelque part, en H. Cette dernière opération revient à porter la corde de DE sur FG; mais il est préférable de marquer le point H par l'intersection d'un petit arc : on ne court pas le risque de percer le papier, si l'on dessine, ou de mal placer le point, si l'on opère sur le terrain. Traçant alors la droite AH, on a l'angle FAH égal à ABC.

C'est ainsi qu'il faut s'y prendre, pour transporter un angle, sans employer la fausse équerre (24). Lorsque l'un des côtés de l'angle à faire n'est pas donné, on tire une droite de position arbitraire qui remplace AF.

28. Deux droites AB, BC, qui se coupent ou se croisent en un point B, forment deux angles ABC, DBE ou ABD, CBE qu'on appelle *opposés par le sommet* (P. I, F. 17).

Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Pour vous en assurer, vous décrirez un cercle dont B soit le centre. La droite CD sera un diamètre, et l'arc CED une demi-circonférence. AE sera aussi un diamètre, et l'arc ACE une demi-circonférence. Ainsi, CED=ACE. Retranchez à chacun de ces arcs, l'arc CE qui leur est commun, les restes seront égaux. Or, ces restes sont AC pour ACE et DE pour CED. Donc AC=DE, et par conséquent, les angles ABC, DBE sont égaux (27).

Toutes les fois donc que vous rencontrerez des angles opposés par le sommet, vous pourrez prononcer qu'ils sont égaux, sans avoir besoin de comparer leurs arcs d'indication.

29. L'angle qui a pour arc d'indication, le quart de la circonférence est appelé *angle droit.*

Si donc on prolonge l'un AB des côtés d'un angle droit ABC (P. I, F. 18), l'autre côté BC formera avec le prolongement BD, un second angle droit CBD.

En effet, décrivez du point B une demi-circonférence qui se termine au diamètre AD. L'arc AC sera l'indication de l'angle ABC, et comme cet angle est supposé droit, AC sera le quart de la circonférence ou la moitié de la demi-circonférence ACD (18). L'arc CD sera donc l'autre moitié, ou un autre quart de la circonférence, et comme l'arc CD est l'indication de l'angle CBD, cet angle est droit aussi.

Concluez de là qu'*une droite ne peut faire un angle droit avec une autre, sans former un second angle droit avec le prolongement.*

30. *Tous les angles droits sont égaux*, puisque les arcs d'indication qui serviraient à les comparer, seraient égaux comme quarts de circonférences égales (27).

Donc, *toute droite qui en rencontre une autre à angle droit, forme deux angles égaux du même côté de cette autre* (29.)

Toute droite AB qui en croise une autre CD à angle droit, forme quatre angles droits (P. I, F. 19), c'est-à-dire que si l'angle AEC est droit, les trois autres le seront aussi. En effet, l'angle AED est droit, nous l'avons démontré tout-à-l'heure (29); l'angle BED=AEC, ce sont deux angles opposés par le sommet (28); l'angle BEC=AED pour la même raison; par conséquent, les angles BED, BEC sont droits aussi, et les quatre angles qui ont le point E pour sommet commun, sont égaux entre eux.

31. *Tous les angles* ABC, CBD, DBE, EBF, FBA, *etc., qu'on peut faire autour d'un point B* (P. I, F. 20), *valent en somme quatre angles droits*; car la somme de leurs arcs d'indication forme la circonférence dont le centre est en B, et cette circonférence contient 4 fois l'arc d'indication d'un angle droit (29).

Tous les angles ABC, CBD, DBE, *etc., qu'on peut faire en un point B, du même côté d'une droite AE,*

valent en somme deux angles droits (P. I, F. 21); car la somme de leurs arcs d'indication forme la demi-circonférence dont le centre est en B, et cette demi-circonférence contient 2 fois l'arc d'indication d'un angle droit.

32. Un angle ABC moindre qu'un angle droit, est dit *aigu* (P. I, F. 21). Un angle CBE plus grand qu'un angle droit, est dit *obtus*.

Par conséquent, une droite CB qui en rencontre une autre AE, en un point B, placé entre les deux extrémités, et qui ne fait pas d'angles droits, forme deux angles, l'un ABC aigu, l'autre CBE obtus, dont la somme vaut deux angles droits (31).

33. L'angle ABC qui, formé par deux cordes, a son sommet sur la circonférence, est appelé *angle inscrit* (P. I, F. 22). L'angle ADC dont le sommet se confond avec le centre, est nommé *angle au centre*.

L'angle inscrit ABC est la moitié de l'angle au centre ADC qui renferme le même arc AEC.

Considérons d'abord l'angle inscrit CBE et l'angle au centre CDE, dont deux côtés confondus forment un diamètre BE. Si nous décrivons de B, avec BE pour rayon, une circonférence, les deux cercles B,D pourront être regardés comme deux roues engrénées, et parce que BE = 2 DE, le rais DE fera deux tours, pendant que le rais BE en fera un seul (11). Conséquemment, l'arc EF qu'a parcouru l'extrémité de BE pour former l'angle EBF (25), est une fraction de la circonférence B moitié moindre que la fraction CE de la circonférence D parcourue dans le même temps par l'extrémité du rais DE, pour former l'angle CDE: si CE est $1/5$ de D, je suppose, EF sera $1/10$ de B. Mais l'arc DG décrit du point B avec le rayon BD, sera aussi $1/10$ de sa circonférence, puisque G achèvera son tour en même temps que F, et comme BD = DE, cette circonférence égale celle de CE. Donc, DG est la moitié de CE, et par suite, l'angle CBE est la moitié de l'angle CDE (26).

On verrait de même que ABE vaut la moitié de ADE. Donc, enfin l'angle inscrit ABC forme seulement la moitié de l'angle au centre ADC.

Pour le cas où le centre D serait en dehors d'un angle inscrit tel que ABH, on dirait: EBH = $1/2$ EDH, EBA = $1/2$ EDA, et par conséquent, EBH—EBA = ABH =

$\frac{1}{2}EDH - \frac{1}{2}EDA = \frac{1}{2}(EDH - EDA) = \frac{1}{2}ADH$. Ainsi, dans tous les cas, l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre qui renferme le même arc.

Du principe ou de sa démonstration, on doit conclure que *l'arc d'indication d'un angle inscrit ABC, est la moitié de l'arc AEC compris entre les côtés et pris sur la circonférence où est le sommet.*

Il s'ensuit que *tout angle inscrit ABC qui comprend un diamètre AC, est un angle droit* (P. I, F. 23); car son arc d'indication est la moitié de la demi-circonférence ou le quart de la circonférence entière (29).

MESURAGE DES ANGLES.

34. On ne peut pas mesurer l'angle avec l'unité ordinaire des superficies, bien qu'il en soit une, attendu qu'il présente une superficie sans fin, tandis que l'arc et l'arpent sont limités. Vous concevez effectivement qu'il y aurait impossibilité à trouver combien une chose infinie contient de fois une chose analogue, mais bornée de toutes parts : ce nombre de fois est infini lui-même.

L'unité de mesure doit être toujours et en tout point de même nature que les choses à mesurer. Ainsi, la mesure des longueurs est une longueur qu'on appelle toise, mètre, etc.; la mesure des capacités est une capacité nommée litre, pinte, etc.; la mesure des poids est un poids; celle des monnaies est une monnaie. La mesure des angles doit donc être un angle. Celui qui est adopté, a pour arc d'indication la 360me partie d'une circonférence quelconque décrite du sommet. Comme cette 360me partie est appelée *degré*, c'est *l'angle d'un degré* qui sert de mesure pour les angles.

Lors donc qu'on dit : un angle de 10 degrés, de 90 degrés, etc., on exprime non seulement que l'arc d'indication contient 10 fois, 90 fois, etc., la 360me partie d'une circonférence, mais encore que cet angle vaut 10 fois, 90 fois, etc., l'angle d'un degré. Ainsi, *l'indication d'un angle donnée en degrés, fait connaître en même temps le nom et la grandeur de cet angle.*

Ne répétez point ce qui est écrit dans presque tous les livres de géométrie, que l'arc exprimé en degrés est la mesure de l'angle. Cette locution est fausse et donne de fausses idées ; un arc ne peut pas plus mesurer un angle, que le mètre linéaire ne peut mesurer un champ. L'arc *indique* la grandeur de l'angle, sans équivaloir à cette gran-

deur, à peu près comme une monnaie de papier indiquerait la valeur des choses, sans avoir cette valeur.

35. *Toute circonférence pouvant être divisée en* 360 *parties égales, renferme* 360 *degrés.* Le degré a 60 parties égales nommées *minutes;* la minute se compose de 60 *secondes;* la seconde contient 60 *tierces,* etc. On a choisi ces nombres, parce que, ayant beaucoup de diviseurs, ils sont d'un emploi commode dans le calcul.

Observez que la minute et la seconde du degré diffèrent beaucoup de la minute et de la seconde de l'heure : il y a 21 600 minutes de degré dans une circonférence; il n'y a que 60 minutes d'heure dans le cercle d'un cadran de montre.

On marque qu'un nombre exprime des degrés, en écrivant un petit zéro à droite et un peu au-dessus. Pour les minutes, on met un accent aigu à la même place que le zéro; pour les secondes, on emploie deux accens. L'arc ou l'angle de 53 degrés, 14 minutes et 57 secondes, s'exprime d'après cela, comme il suit : 53° 14′ 57″.

36. Il existe des instrumens qui, portant un cercle divisé en degrés et parties de degré, sont propres au mesurage des arcs et par suite à celui des angles. Mais l'usage de ces instrumens ne convient qu'aux personnes avancées dans l'étude de la Géométrie, et d'ailleurs, celles qui se bornent aux connaissances primaires, n'ont pas besoin de savoir mesurer les angles; il leur suffit de pouvoir les comparer (*).

Nous dirons seulement que l'emploi de tels instrumens repose sur ce principe : *Des arcs de rayons différens ont toujours le même nombre de degrés, quand ils sont compris dans le même angle, et que le sommet est centre commun.*

Supposez en effet, que l'angle ABC (P. I, F. 24) puisse être placé 12 fois autour du point B. Les 12 angles qui occuperont alors tout le grand cercle B seront égaux, et par conséquent, les 12 arcs de rayon BD qu'ils comprendront entre leurs côtés, seront aussi égaux. Or, ces 12 arcs formeront en somme la grande circonférence. Un quelconque DE sera donc le douzième de 360° ou 30°. Par la même

(*) La description raisonnée des instrumens propres au mesurage des angles, se trouve, avec un grand nombre d'autres choses curieuses et utiles, dans la *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers*, troisième édition, par C.-L. Bergery; prix 6 f. — Cet ouvrage a été adopté et recommandé par l'Université.

raison, les 12 arcs de rayon BF, compris entre les côtés des mêmes angles, seront égaux, et comme leur somme fera la petite circonférence B, un quelconque FG sera aussi le douzième de 360° ou 30°.

Que l'arc employé pour connaître l'angle soit donc d'un petit ou d'un grand rayon, situé près ou loin du sommet, il n'importe : on aura toujours le même nombre de degrés. Voilà pourquoi des cercles divisés, de toute grandeur, peuvent servir au mesurage du même angle.

PERPENDICULAIRES.

37. Deux droites AB, BC (P. I, F. 18) qui font ensemble un angle droit ABC, sont dites *perpendiculaires* l'une sur l'autre.

Le plus grand des angles d'une équerre est un angle droit ; par conséquent, les deux arêtes qui le forment sont perpendiculaires l'une sur l'autre. C'est donc la même chose pour deux droites, d'être d'équerre ou perpendiculaires. Aussi emploie-t-on indifféremment ces deux expressions.

La perpendiculaire BC au milieu d'une droite DE est le lieu de tout point également éloigné des deux extrémités D, E de la droite (P. I, F. 25).

D'abord, tout point A de la perpendiculaire BC est à égales distances des extrémités de DE, si B est le milieu de cette droite. En effet, la distance de A à D est la droite AD ; la distance de A à E est la droite AE. Or, si nous faisons tourner la figure ABE autour de AB, considérée comme une charnière, les points A,B ne bougeront pas ; BE se couchera sur BD, puisque les angles ABE, ABD sont égaux ; E tombera sur D, puisque BE=BD. Par conséquent, AE se confondra avec AD. Ces deux droites sont donc égales, car le rabattement opéré n'a pas altéré leur longueur.

Ensuite, tout point F pris hors de BC, est inégalement éloigné de D,E, c'est-à-dire que FE n'est pas égal à FD. Effectivement, FD est plus court que la ligne brisée FAD, et cette ligne brisée égale FE, puisqu'elle se compose de FA qui fait partie de FE, et de AD qui est égale à AE.

Il suit de là que *si une droite a deux de ses points également éloignés chacun des deux extrémités d'une autre, elle est perpendiculaire au milieu de cette autre droite.*

38. *Tracer la direction d'un mur qui doit être d'équerre sur un autre AB et le rencontrer en C* (P. I, F. 26).

La direction de ce mur sera une perpendiculaire *élevée*

sur AB, par le point C. Pour trouver cette perpendiculaire, vous pourriez vous servir du cordeau-équerre (22) ou d'une équerre ordinaire; mais on n'a pas toujours un cordeau-équerre à sa disposition et il est difficile de rendre cet instrument très-exact; l'équerre ordinaire n'est pas assez grande pour que les opérations auxquelles elle servirait sur le terrain, eussent quelque précision; d'ailleurs, peu d'équerres sont justes, et quand on les fait telles, le jeu du bois ne tarde pas à les fausser. Il vaut donc mieux employer le tracé suivant qui peut servir à élever des perpendiculaires sur le papier, comme sur le terrain, et qui donne toujours beaucoup d'exactitude.

Marquez sur AB, deux points D,E qui soient également éloignés de C; décrivez de chacun de ces points, avec le même rayon, un petit arc de cercle, au-delà ou en-deçà de AB; puis joignez au point C, le point F intersection des deux arcs. FC sera la perpendiculaire demandée ou la direction du nouveau mur; car le point C est également éloigné de D et de E, les distances FD, FE sont égales, et par suite FC est perpendiculaire au milieu de DE (37).

Le rayon des deux petits arcs doit être plus grand que la moitié de DE: moindre que cette moitié, il ne permettrait pas aux deux arcs de se couper; égal à cette moitié, il donnerait seulement le point C déjà connu. En outre, pour que la droite CF ne diffère pas de la vraie perpendiculaire, quelque loin qu'on la prolonge, il importe de choisir d'avance la place du point F, à la plus grande distance possible de C, et de prendre CD, CE égales à cette distance estimée grossièrement.

Opérez ainsi dans tous les cas où il vous faudra *élever une perpendiculaire en un point donné d'une droite*

39. *Tracer la direction d'un fossé qui doit aboutir à l'extrémité A d'un autre fossé dont AB est une arête, et le rencontrer d'équerre* (P. I, F. 27).

Prolongez BA à droite du point A, et employez le procédé précédent, pour élever en A une perpendiculaire sur BC.

Voilà ce qu'il faut faire toutes les fois qu'on doit *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qui peut être prolongée.*

40. *Couper carrément le bout A d'une planche AB* (P. I, F. 28), en d'autres termes, tracer par le point A, un trait qui soit d'équerre sur l'arête AB de la planche.

Prenez un point C qui avoisine le bout A et soit placé à peu près au milieu de la largeur de la planche. De ce point, comme centre, et d'un rayon égal à la distance CA, décrivez un arc de cercle. Joignez C au point D où le cercle coupe l'arête AB de la planche, et prolongez la droite DC jusqu'à ce qu'elle rencontre une seconde fois l'arc de cercle; joignez enfin le point d'intersection E avec A. La droite AE se trouvera d'équerre sur AB, parce que l'angle DAE sera droit, et cet angle sera droit, parce qu'il aura son sommet A sur la circonférence et comprendra le diamètre DE (33).

On se sert de ce moyen sur le papier, comme sur le terrain, toutes les fois qu'on doit *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qui ne peut être prolongée.*

41. *Tracer la direction d'une allée qui partant d'un point donné A, aille couper d'équerre une autre allée dont BC figure un des côtés* (P. I, F. 29).

Marquez sur BC deux points également éloignés de A, et pour cela, coupez cette droite par un arc de cercle DE décrit de A, avec un rayon arbitraire. Ensuite, décrivez de D, E, deux arcs qui se croisent en deçà de BC, au point F. La droite AF sera la direction demandée (37).

C'est ainsi qu'il faut opérer toutes les fois qu'il s'agit d'*abaisser une perpendiculaire AG sur une droite BC, d'un point extérieur A.*

La plus courte droite qui puisse être menée d'un point A à une droite DE (P. I, F. 25), est la perpendiculaire AB abaissée de ce point.

AB est en effet plus courte que toute autre droite AD. Elevons une perpendiculaire GH au milieu de BD; H sera également éloigné de B et de D (37), et la ligne brisée AHB égalera AD. Or, AB est plus courte que AHB (1).

Il s'ensuit que *la distance d'un point A à une droite DE, doit se mesurer sur la perpendiculaire AB abaissée de ce point sur la droite.*

42. Les trois tracés qui viennent de nous occuper, peuvent, sur le terrain, s'exécuter avec une grande exactitude, au moyen de *l'équerre d'arpenteur.*

Cet instrument a deux formes différentes: sous l'une, il présente une espèce de boîte en laiton, à 10 faces, portée par un pied; les deux faces des bouts ont 8 arêtes et les autres en ont quatre; chacune de ces dernières a une fente étroite, nommée *mire;* de deux mires opposées, l'une est

partagée en deux parties égales, dans le sens de sa longueur, par un crin; c'est à l'autre que l'œil doit être appliqué; enfin, l'alignement que déterminent deux mires opposées, se trouve croisé d'équerre par celui de deux des 6 autres mires.

Sous sa seconde forme, l'équerre d'arpenteur offre deux règles en laiton, qui se croisent et surmontent une douille propre à recevoir un pied; à chaque extrémité de ces règles, s'élève une petite plaque appelée *pinnule*, qui a une mire; deux des mires contiennent aussi un crin et les deux alignemens se coupent à angles droits.

Pour résoudre le dernier problème à l'aide de l'équerre d'arpenteur, on fait planter à plomb un jalon sur la droite BC, en B par exemple (P. I, F. 29); on cherche ensuite, sur cette même droite, un point G tel qu'en y plantant l'équerre à plomb, on voye le jalon B dans un des alignemens de l'instrument, et le point A dans l'alignement perpendiculaire à celui-là. Remplaçant alors l'équerre par un jalon mis à plomb, on a la direction AG de la perpendiculaire demandée.

Il faut un peu d'habitude pour trouver promptement le point G; encore n'y parvient-on qu'après avoir placé et déplacé deux ou trois fois l'équerre.

On ne rencontre pas cet inconvénient dans les problèmes des nos 38, 39 et 40. Il suffit effectivement, pour les résoudre, de planter l'équerre à plomb au point où doit être élevée la perpendiculaire; de viser, par un des deux alignemens qui se coupent à angles droits, un point marqué sur la droite donnée, et de faire planter à plomb un jalon sur l'autre alignement.

43. *Trouver le milieu d'un mur.*

On peut mesurer la longueur totale du mur AB, (P.I, F. 30), en prendre la moitié, et porter la mesure de A vers B, autant de fois que l'indique cette moitié; le point E ainsi déterminé est le milieu cherché. Mais il est plus court et plus sûr lorsque rien ne s'y oppose, d'opérer comme il suit:

Des extrémités A, B du mur, décrivez, avec un rayon arbitraire, deux arcs qui se coupent en avant, au point C; des mêmes centres, avec un rayon plus petit ou plus grand que le précédent, décrivez deux autres arcs qui se coupent aussi en avant, au point D. La droite DC prolongée jusqu'au mur, en marquera nécessairement le milieu E (37).

C'est ce procédé qu'il faut suivre toutes les fois qu'on doit *élever une perpendiculaire du milieu inconnu d'une droite*, et qu'on ne veut pas ou qu'on ne peut pas déterminer ce milieu par un double mesurage. Si les localités le

permettent, il vaut mieux tracer les deux premiers arcs d'un côté de la droite donnée, et les autres du côté opposé. De cette façon, les points C, D sont plus éloignés l'un de l'autre, et la perpendicularité est plus exacte; car on ne peut guère assurer une direction par deux points très-rapprochés.

44. La droite que forme un fil-à-plomb librement suspendu, est nommée *verticale*, et toute droite perpendiculaire à celle-là est *horizontale*. Quelquefois cette dernière s'appelle aussi *ligne de niveau*.

Quand une droite n'est ni verticale, ni horizontale, on la dit *inclinée*.

Planter un jalon à plomb, ou le rendre vertical, ou le placer verticalement, c'est donc la même chose.

Par un même point, il ne peut passer qu'une seule verticale; mais une infinité d'horizontales différentes peuvent s'y croiser.

C'est au moyen des instrumens appelés *niveaux*, qu'on peut marquer des points situés sur une horizontale ou vérifier si une droite est horizontale.

Pour la première de ces deux opérations, on se sert du *niveau d'eau*. Sa pièce principale est un tube en ferblanc deux fois coudé. Au milieu de ce tube est une douille, par le moyen de laquelle on peut poser l'instrument sur un pied. Les deux petites branches portent chacune un ajutage en verre, muni d'un bouchon. Si vous versez assez d'eau dans un des ajutages pour qu'ils en soient remplis tous deux en partie, le liquide s'y mettra de niveau et vous fournira un alignement horizontal. Visez donc, par cet alignement, deux objets quelconques et faites y marquer les points auxquels il aboutit; ces deux points appartiendront à une horizontale, même quand vous auriez été obligés de faire pivoter le niveau pour en déterminer un: il suffit que l'élévation de l'instrument au-dessus du sol n'ait pas varié.

Pour vérifier si une droite est horizontale et la rendre telle lorsqu'elle ne l'est pas, on emploie le *niveau de maçon* ou le *niveau à bulle d'air*. Le premier de ces instrumens sera décrit plus loin. Quant au second, il présente un petit tube de verre qui fait légèrement la voûte et que contient une monture en laiton. Un peu d'air est mêlé à l'eau dont le tube est presque plein. Comme les corps plus légers que l'eau montent toujours à la surface de ce liquide, vous concevez que la bulle d'air doit occuper le haut de l'arc formé par le tube, quand les deux extrémités de cet arc sont de

niveau, ou quand la droite sur laquelle pose la monture en laiton, a elle-même cette position; car alors l'eau remplit également les deux parties extrêmes de l'arc et laisse libre le milieu. Si donc la bulle se porte à gauche, par exemple, c'est que la ligne droite est trop élevée de ce côté, et il faut abaisser l'extrémité de gauche ou hausser l'autre, jusqu'à ce que la bulle soit au milieu de l'arc et s'y maintienne. Il est aisé de sentir, d'après cela, qu'un tel niveau est d'une grande sensibilité et d'une grande justesse; aussi ne saurais-je trop vous en recommander l'usage; il coûte d'ailleurs peu cher.

PARALLÈLES.

45. Deux droites qui sont partout également écartées l'une de l'autre, se nomment *parallèles;* elles ne peuvent jamais se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.

Il suit de là que des perpendiculaires abaissées des différens points A, B, C, etc., d'une droite AD, sur sa parallèle EF (P. I, F. 31), sont toutes de même longueur; car AE, BG, CH, sont les distances des points A, B, C, à la droite EF (41.)

Donc, *la parallèle d'une droite est le lieu de tous les points situés à une même distance de cette droite.*

Ainsi, pour marquer plusieurs points A, B, C, etc., situés à 5 mètres d'une droite EF, il vous suffirait d'élever une perpendiculaire EA sur EF, de porter 5 mètres sur cette perpendiculaire, à l'effet de déterminer A, de mener par ce point une parallèle à EF, et de placer sur cette parallèle AD, les points B, C, etc., à la distance où ils devraient être de A.

46. Il est aisé de démontrer que *deux droites AB, CD, parallèles à une troisième EF* (P. I, F. 32), *doivent être parallèles l'une à l'autre.* En effet, les écartemens AE, CE, sont invariables, et comme AC=AE—CE, cet écartement des droites AB, CD, est invariable aussi.

47. Toute droite qui traverse un système d'autres droites, parallèles ou non parallèles, est appelée *transversale.*

Des parallèles AB, CD coupées par une transversale EF, forment plusieurs angles (P. I, F. 33); ceux de ces angles qui se trouvent placés de la même manière par rapport à la transversale et par rapport aux parallèles, sont égaux entre eux; il en est de même de ceux qui se trouvent placés différemment par rapport à la transversale et différemment

par rapport aux parallèles. Ainsi, l'angle BGE=DHE : ces deux angles sont tous deux du même côté de EF, et tous deux au-delà des parallèles ; on les appelle angles *correspondans*. De même AGF=DHE : ces deux angles sont l'un d'un côté de EF, l'autre du côté opposé, le premier en-deça de la parallèle AB, le second au-delà de la parallèle CD ; on les nomme angles *alternes-internes :* alternes, pour exprimer que la transversale les sépare ; internes, pour indiquer qu'ils commencent tous deux entre les parallèles.

Ainsi, *il y a égalité entre les angles correspondans et entre les angles alternes-internes.*

La chose est visible pour les premiers ; car si AB descendait, sans cesser d'être parallèle à CD, elle finirait par se confondre avec cette droite et ferait le même angle DHE. Quant aux angles alternes-internes, AGF=BGE son opposé par le sommet (28) ; BGE=DHE son correspondant, et conséquemment AGF=DHE.

Il suit de là que *si deux droites coupées par une troisième, forment des angles égaux qui aient la position des angles correspondans ou celle des angles alternes-internes, ces deux droites sont parallèles.*

Donc, *des perpendiculaires à une même droite sont parallèles ;* car si AB, CD (P. I, F. 34) sont perpendiculaires sur BE, les angles correspondans ABE, CDE sont droits et par conséquent égaux(30).

48. *Tracer, sur le papier ou sur le tableau, une droite qui passe par un point A et soit parallèle à une autre droite* BC (P. I, F. 35.)

On se sert pour cela d'une règle et d'une équerre. Peu importe que l'équerre soit juste ; il suffit que les arêtes en soient droites.

Appliquez le plus grand DE des deux petits côtés de l'équerre, contre la règle, et placez ces deux instrumens ainsi accolés, de manière que le grand côté CD du premier se confonde avec la droite donnée BC. Faites glisser ensuite le système à droite ou à gauche, sans abandonner BC, jusqu'à ce que la face de la règle, sur laquelle s'appuie l'équerre, passe par le point A, en même temps que le grand côté CD continuera de couvrir une partie de BC. Enfin poussez l'équerre le long de la règle maintenue fixe, pour amener le grand côté sur le point A, et tracez une droite AF en suivant ce grand côté ; elle sera la parallèle demandée, car les angles correspondans CDE, DAF seront égaux (47).

S'il est nécessaire que la parallèle soit plus longue que AF, vous la prolongerez ensuite ; et pour cela vous maintiendrez l'équerre dans sa dernière position, vous appliquerez la règle le long du grand côté AF, puis vous enleverez l'équerre, et vous tracerez une droite le long de la règle.

49. *Tracer la direction d'une rangée d'arbres qui doit être parallèle à une autre rangée AB déjà plantée, et partir d'un point donné* C (P. I, F. 36).

Il faut marquer sur AB, un point A autant éloigné de C qu'il sera possible ; décrire de ce point A, avec la distance AC pour rayon, un arc qui parte de C, et se termine sur AB, en B, par exemple ; décrire de C, avec le même rayon, un second arc qui parte de A et soit sensiblement plus long que le premier ; prendre la corde BC, et avec cette corde pour rayon, décrire de A un troisième arc qui coupe le second ; puis enfin, joindre l'intersection D avec le point donné C. La droite CD sera parallèle à AB, car (47), si vous tiriez la droite AC, les angles alternes-internes ACD, BAC seraient égaux, ayant des arcs d'indication de même rayon et de même longueur (27).

Ce procédé convient à tous les cas où les parallèles ne doivent pas être très-écartées, et où le terrain permet de tracer des arcs. On décrit ces arcs, soit à l'aide d'un cordeau, soit à l'aide d'une perche (4). Observez qu'il suffit de marquer l'extrémité B de l'arc BC et une petite partie de AD.

50. *Tracer la direction d'un mur qui doit contenir un point donné A, et être parallèle à un autre mur BC éloigné ou situé au-delà d'une pièce d'eau* (P. I, F. 37.)

On ne peut faire usage, dans un tel cas, ni d'un cordeau, ni d'une perche ; il faut se servir d'une équerre d'arpenteur ou d'une fausse-équerre portée sur un pied. Ce dernier instrument est facile à construire : il suffit de faire sur la tête d'un gros piquet, deux entailles droites qui se coupent sous un angle quelconque, ou mieux encore de fixer sur le bout d'un bâton, deux petites planchettes qui se croisent et portent 3 épingles : une au croisement et les deux autres à deux des extrémités. Ces épingles doivent être implantées de façon qu'elles se trouvent verticales, quand les planchettes seront de niveau.

Quant à la manière d'opérer, elle est très-simple aussi. Plantez verticalement le bâton sur la droite BC, en un point D, tel que l'un des alignemens formés par

l'épingle du croisement et les autres, étant dirigé sur un jalon vertical B placé le plus loin possible, il arrive que le second alignement passe par le jalon A, et qu'en même temps les planchettes soient bien horizontales, ce que vous vérifierez à l'aide d'un niveau. Avec un peu d'habitude, vous trouverez ce point D après quelques tâtonnemens. Enlevez alors l'instrument et remplacez-le par un jalon vertical; puis établissez la fausse-équerre au point A, comme elle a été établie en D; dirigez l'un des alignemens des épingles sur le jalon D, de façon que l'autre alignement laisse les droites AD et BC du même côté; plantez enfin un jalon vertical E sur ce second alignement et le plus loin possible de A. La direction AE sera celle du mur qui doit être parallèle à BC, car si vous tiriez la droite AD, vous formeriez les angles alternes-internes ADB, DAE, et ces angles ont été faits égaux, si les planchettes n'ont pas été dérangées (47).

On opère absolument de la même manière avec l'équerre d'arpenteur. La seule différence qu'il y ait, c'est que la droite AD se trouve alors perpendiculaire à BC et à AE, au lieu de faire des angles aigus avec ces directions.

TANGENTES ET CERCLES TANGENS.

51. On dit qu'une droite AB est *tangente* à un cercle C, lorsqu'elle n'a réellement qu'un seul point D de commun avec ce cercle (P. I, F. 38). Le point D est le *contact* de la tangente et du cercle.

Pour qu'une droite AB se trouve tangente à un cercle C, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon CD. Elle n'a en effet alors que le seul point D de commun avec le cercle; car tout autre point E pris sur AB, aussi près que vous voudrez de D, sera plus éloigné du centre C que D (41) et ne se trouvera pas sur la circonférence.

52. *Tracer par un point D, pris sur un cercle C, une droite qui soit tangente à ce cercle* (P. I, F. 38).

Vous courriez grand risque de donner une fausse direction à la tangente, si vous vous contentiez, pour la tracer, d'appliquer une règle contre le cercle, au point D. Il faut absolument tirer le rayon CD, puis élever une perpendiculaire à l'extrémité D de ce rayon (39 et 40).

53. *Tracer par un point A, pris hors d'un cercle B, une droite qui soit tangente à ce cercle* (P. I, F. 39.)

Il suffit dans ce cas d'appliquer une bonne règle contre le point A et contre le cercle : une droite AC tracée le long de la règle maintenue dans cette position, est la tangente demandée. Mais, s'il fallait déterminer exactement le point de contact de cette tangente, vous devriez abaisser du centre B, une perpendiculaire BE, sur AC (41) ; ou bien joindre A au centre B, chercher le milieu D de la droite AB (43), et décrire du point D comme centre, avec DB pour rayon, un cercle ou seulement un arc qui coupât AC. L'intersection E serait le contact cherché ; car, si vous tirez le rayon BE, la tangente AC sera perpendiculaire à l'extrémité E de ce rayon, puisque l'angle AEB inscrit au cercle D, comprend le diamètre AB (33).

C'est toujours ainsi qu'il faut opérer, pour déterminer exactement le contact d'une tangente.

Remarquez que d'un point A situé à l'extérieur du cercle B, on peut toujours mener deux tangentes AC, AF à ce cercle, et que le dernier tracé fait trouver à la fois les deux contacts E, G. C'est pour cela qu'on le préfère ordinairement au premier.

54. *Tracer les fondations d'un édifice dont le contour doit présenter un demi-cercle et deux tangentes parallèles.*

Décrivez le demi-cercle dans la position et avec le rayon qu'il doit avoir, puis tracez le diamètre AB (P. I, F. 40), et élevez aux extrémités A, B, les perpendiculaires AC, BD. Ces deux droites seront tangentes, comme perpendiculaires aux extrémités des rayons AE, EB (51), et parallèles, comme perpendiculaires à une même droite AB (47).

Ainsi, *les tangentes parallèles d'un même cercle sont perpendiculaires aux extrémités d'un diamètre et leur distance égale ce diamètre.*

55. On peut mener 4 tangentes à deux cercles A, B (P. I, F. 41) : deux extérieures CD, EF qui se rencontrent en un point G de la droite AB des centres ; deux HI, KL qui passent entre les cercles et se croisent en un point M de la même droite AB. La règle suffit pour le tracé de ces 4 tangentes, et lorsqu'on a déterminé le contact N de CD, par exemple, avec le cercle A (53), le contact avec le cercle B est donné par un rayon BO mené parallèlement au rayon AN (47).

56. Deux cercles A, B qui n'ont qu'un point C de

commun, sont dit *tangens* l'un à l'autre (P. I, F. 42). Le point C est leur *contact*; il se trouve toujours sur la droite AB des centres.

Chacun des deux cercles est tout-à-fait en dehors de l'autre, comme dans la figure 42, et alors *ils se touchent extérieurement;* ou bien, le petit est entouré du grand, comme dans la figure 43, et alors le grand *est touché intérieurement* par le petit. Dans le premier cas, la distance des centres A, B égale la somme des rayons AC, BC; dans le second, elle égale la différence des rayons AC, BC.

57. Lorsqu'au lieu de cercles, ce sont seulement des arcs qui se touchent ou sont tangens l'un à l'autre, on dit quelquefois qu'ils se *raccordent*. C'est d'arcs raccordés que sont formés ordinairement les cintres des ponts, des alcoves, etc. Ces cintres sont dits *surbaissés*, parce qu'ils ont une hauteur moindre que leur demi-largeur, au lieu qu'un *plein cintre* étant formé par une demi-circonférence, a une hauteur égale à sa demi-largeur. Les cintres surbaissés sont appelés quelquefois *anses de panier*, *courbes à* 3, *à* 5 *centres*, selon qu'ils renferment trois ou cinq arcs de cercle.

Tracer un cintre surbaissé, à trois centres, dont la largeur et la hauteur sont données.

Tirez une droite AB égale à la largeur (P. I, F. 44); élevez une perpendiculaire au milieu de AB (43) et prenez CD égale à la hauteur du cintre; des points A, C, décrivez, avec AC pour rayon, deux arcs qui se coupent en un point E; joignez E aux points A, C; rapportez la distance CD sur CE, de C en F, au moyen d'un arc de cercle décrit du point C; joignez D à F et prolongez la droite DF jusqu'à AE; enfin, par le point d'intersection G, menez GH parallèlement à CE. Vous aurez IG=IA, parce que CE=CA; vous aurez aussi HG=HD, parce que CF=CD. Vous pourrez donc décrire de I un arc AG, et de H un arc GD. Ces deux arcs se *raccorderont* ou se toucheront en G, attendu que la distance IH de leurs centres, sera égale à la différence de leurs rayons HG, IG (56.)

Il faudra ensuite rapporter CI de C en K, au moyen d'un arc dont C soit le centre; décrire de K, avec KB, un arc sensiblement plus grand que l'arc AG, et enfin continuer l'arc GD, jusqu'à ce qu'il soit touché intérieurement en L, par l'arc qui a son centre en K. Vous aurez formé alors une courbe exempte de *jarrets*, qui aura trois centres I, H, K ou qui renfermera trois arcs de cercle AG, GDL, LB.

Chacun de ces arcs sera la sixième partie de sa circonférence ou contiendra 60 degrés.

58. Il arrive parfois que, pour soutenir un escalier ou une rampe, on est obligé de construire un cintre dont les extrémités ne soient pas de niveau. La demi-circonférence ne peut être employée dans ce cas; aussi est-ce une espèce d'anse de panier, nommée *arc rampant*, qui forme alors le cintre.

Tracer un arc rampant composé de deux arcs de cercle.

Tirez une droite AB égale à la largeur que doit avoir l'arcade (P. I, F. 45); élevez au milieu une perpendiculaire CD; par les extrémités A, B, menez des parallèles à CD; portez sur l'une, de A en E, la distance du sol à l'extrémité la plus élevée de l'arc, et sur l'autre, de B en F, la distance du sol à l'extrémité la moins élevée. La droite EF ainsi déterminée, se trouvera inclinée comme la ligne de rampe, et le point G où elle rencontrera CD, sera son milieu. Prenez alors GH=GE; abaissez de H, sur EF, une perpendiculaire HI; puis menez par E et par F des parallèles à AB. Les points K, L, où ces parallèles rencontreront la perpendiculaire HI, seront les centres des deux arcs du cintre. Vous décrirez donc de K, avec KE pour rayon, un arc de cercle, et de L, avec LF, un second arc. Ces deux arcs se raccorderont en H, parce qu'ils passeront par ce point, et que la distance de leurs centres sera précisément la différence de leurs rayons KH, LH.

COMPARAISON DES DROITES.

59. Maintenant que vous connaissez les propriétés essentielles des perpendiculaires et des parallèles, vous êtes en état d'étudier la comparaison des droites. C'est une partie fort importante de la Géométrie: on serait souvent obligé de se livrer à des mesurages longs, fastidieux et difficiles, si l'on ne savait pas, par les principes, combien de fois se contiennent des droites placées dans telles ou telles circonstances.

Vous avez appris déjà que tous les rayons d'un même cercle sont égaux (5), que tous les diamètres ont même longueur et qu'il y a aussi égalité entre les cordes d'arcs égaux pris sur le même cercle ou sur des cercles de même rayon (15.)

Il existe encore beaucoup d'autres circonstances qui rendent certain tout d'abord de l'égalité des droites.

Des droites sont égales quand elles se trouvent comprises entre des circonférences *concentriques*, c'est-à-dire de même centre, et qu'elles font partie des rayons.

Ainsi, les droites DF, EG (P. I, F, 24), comprises entre deux circonférences concentriques, et dirigées vers le centre commun B, sont de même longueur; cela doit être en effet, car BD=BE, BF=BG, et par conséquent, BD—BF=BE—BG ou DF=EG.

Voilà pourquoi l'on dit que *deux circonférences concentriques sont partout à la même distance l'une de l'autre.*

60. Une droite AD (P. I, F. 25) qui fait un angle aigu ou obtus avec une autre DE, est appelée *oblique*, et le point D de rencontre est dit le *pied* de cette oblique, comme le point B est dit le *pied* de la perpendiculaire AB.

Deux obliques sont égales, quand elles s'écartent également de la perpendiculaire abaissée de leur point de rencontre. Les écartemens dont il s'agit, sont ceux des pieds, de sorte que si BD=BE, on a nécessairement AD=AE.

En effet, AB est alors perpendiculaire au milieu de DE, et par conséquent, son point A se trouve à la même distance des extrémités D,E (37).

Réciproquement, *les écartemens de deux obliques égales sont égaux;* c'est-à-dire que si AD=AE, on a nécessairement BD=BE.

Si l'on faisait tourner la figure ABE sur AB, elle se rabattrait exactement sur la figure ABD, l'angle E couvrirait l'angle D, et l'angle BAE couvrirait aussi l'angle BAD. Il s'ensuit que *dans deux figures séparées ABE, ABD, l'égalité des perpendiculaires AB et AB, BD et BE, celle des obliques et celle des angles analogues existent en même temps;* de sorte que deux de ces 5 égalités ayant lieu, il en résulte nécessairement les trois autres. Qu'on sache, par exemple, que AD=AE et que l'angle D=E, on en conclura BD=BE, AB=AB, BAD=BAE.

Le niveau de maçon est composé de deux obliques égales AB, AC (P. I, F. 46), d'une traverse DE qui rend constant leur écartement, et d'un fil-à-plomb dont le point d'attache est près de A, sur la direction de la perpendiculaire au milieu de BC. Un trait *indicateur*, fait sur la traverse, se trouve dans la même direction; de sorte qu'au moment où le fil couvre l'indicateur, il est perpendiculaire à BC. Cette droite BC ou celle sur laquelle est posé le niveau, est donc alors horizontale, puisqu'elle rencontre d'équerre la verticale du fil-à-plomb (44).

Il est bon d'observer que rien ne nécessite l'égalité des règles AB, AC; elles peuvent être inégales, pourvu que le point d'attache du fil et le trait indicateur soient sur une perpendiculaire à BC.

61. *Deux tangentes sont égales, quand elles partent du même point et se terminent aux contacts.* Ainsi, AE=AG (P. I, F. 39); et cela doit être effectivement, car les arcs BE, BG sont égaux, ayant pour cordes des rayons du cercle B (15); par suite, les arcs AG, AE, restes de deux demi-circonférences, sont aussi égaux, et leurs cordes AG, AE ont même longueur.

62. Une droite se trouve divisée en deux parties égales, quand elle est rencontrée ou coupée par une perpendiculaire élevée en son milieu. Il suffit donc, pour *diviser une droite en deux parties égales*, d'exécuter le tracé du n° 43.

Mais, ce procédé n'est plus praticable, si la droite à diviser est très-longue. Il faut alors recourir à un double mesurage, ou ce qui est plus court, employer les moyens suivans :

Supposons que A et B (P. I, F. 47) soient les deux extrémités d'une des limites d'un champ, et qu'on ait à planter une borne au milieu de AB, pour diviser le terrain en deux portions égales. Vous placerez un premier jalon en A, un second en B, un 3e en un point 3 quelconque, par lequel vous dirigerez un alignement 3.4 parallèle à AB (50), un 5e sur l'alignement 4.2, un 6e à la rencontre des alignemens 4.1 et 3.2, un 7e sur l'alignement 3.1, un 8e sur l'alignement 2.1, un 9e à la rencontre des alignemens 4.5 et 3.7, un 10e enfin, à la rencontre des alignemens 2.8 et 9.6. Ce 10e jalon marquera le point milieu de AB.

L'emploi des alignemens qui se rencontrent ou se croisent trois à trois, comme dans l'opération précédente, constitue la méthode *des transversales*; elle est remarquable pour sa simplicité, pour les difficultés qu'elle fait vaincre facilement, sans autres instrumens que des perches, et pour son uniformité qui la grave promptement dans la mémoire. Vous verrez en effet que la figure 47 se reproduit, avec peu de différence, dans toutes les applications de cette méthode.

Mais observez que pour arriver à des résultats exacts par les transversales, il faut que les alignemens soient

pris avec beaucoup de soin, que les jalons soient bien droits et plantés verticalement : leur position doit même être vérifiée au fil-à-plomb. Du reste, il est aisé d'en diminuer le nombre, car si vous avez deux aides, vous pourrez vous dispenser de planter les jalons 5, 7, 8 : l'un des aides se placera sur l'alignement 4.2, vers le point 5, par exemple, l'autre sur l'alignement 3.1, vers le point 7, et par des signes de main, ils vous feront placer le jalon 9 à l'intersection de ces deux alignemens. Le secours de deux aides abrège donc beaucoup l'opération ; on peut dire aussi qu'il diminue les causes d'erreur. Un moyen de les diminuer encore davantage, c'est de figurer à l'avance les alignemens sur le papier, d'y numéroter leurs intersections, et de donner aux jalons les numéros correspondans du croquis.

63. *La perpendiculaire CD au milieu d'une corde AB, passe aussi par le milieu E de l'arc AEB* (P. I, F. 48). Effectivement, le point E appartenant à CD, est à la même distance de A et de B (37) ; or l'égalité des cordes AE, BE, produit celle de leurs arcs (15).

Partager un arc AB en deux parties égales.

Il suffit d'exécuter l'opération du n° 43, c'est-à-dire que, sans tracer la corde, vous décrirez des extrémités A, B, deux petits arcs qui se coupent au-delà de AB, en un point C, et deux autres petits arcs qui se coupent en-deçà de AB, en un point D. Joignant C à D, vous aurez le milieu de l'arc AB, au point E où le coupera la droite CD perpendiculaire au milieu de la corde.

Il resterait à déterminer, de la même manière, le milieu de BE et celui de AE, si l'on voulait diviser l'arc AB en quatre parties égales.

Trouver le centre d'un cercle tracé.

C'est le même procédé qu'il faut employer, car le centre se trouvant à la même distance des extrémités d'une corde (5), est, comme le milieu de l'arc, sur la perpendiculaire au milieu de cette corde. Marquez donc deux points A, B sur la circonférence (P. I, F. 49), et tracez la droite CD qui divise l'arc AB en deux parties égales ; prenez un 3e point E et tracez la droite FG qui passe par le milieu de l'arc BE ; le centre des deux arcs et du cercle se trouvera au point H, intersection des droites CD, FG perpendiculaires aux milieux des cordes.

Pour rendre la position du point H plus distincte, il

convient de choisir les trois points A, B, E, de manière que CD, FG soient à-peu-près d'équerre. On y parvient en prenant E de façon que la corde BE paraisse d'équerre sur la corde AB, ou que ABE forme une demi-circonférence environ (33).

Faire passer un cercle par trois points A, B, E, disposés en ligne brisée.

Bien que le cercle ne soit pas tracé, évidemment son centre H doit être donné par les opérations précédentes. L'ayant trouvé, vous prendrez pour rayon, la distance AH ou BH, ou EH. Ces trois distances sont égales, car H étant un point de la perpendiculaire au milieu de la corde AB, est également éloigné de A et de B; appartenant à la perpendiculaire au milieu de la corde BE, il est également éloigné de B et de E.

64. Comme l'arc d'indication AC d'un angle ABC a son centre au sommet B (P. I, F. 50), la perpendiculaire BD au milieu de la corde, doit passer par ce sommet; de plus, elle divise l'angle en deux parties égales, puisqu'elle forme deux angles ABD, DBC qui ont des arcs d'indication égaux (27). C'est donc par la division de la corde d'un arc en deux parties égales, qu'on fait la même division sur un angle.

Diviser en deux parties égales un angle ABC.

Du sommet B, vous décrirez avec un rayon arbitraire, un arc AC, ou vous en marquerez seulement les deux extrémités A, C; puis vous décrirez de ces points deux arcs de même rayon, qui se coupent en un point D situé en-deçà de AC, s'il est possible, et vous joindrez D à B. La droite BD vous donnera les deux angles ABD, DBC, qui seront égaux, parce que leurs arcs d'indication AE, EC auront même longueur.

La droite qui divise un angle en deux parties égales, se nomme *bisectrice* de cet angle.

La bisectrice est le lieu de tout point également éloigné des deux côtés de l'angle. Ainsi, les perpendiculaires FG, FH, abaissées d'un point quelconque F de la bisectrice BD, sur les côtés de l'angle, sont de même longueur. On le démontre en rabattant l'angle ABD sur son égal CBD. Le point F de la charnière BD ne bouge point, BA s'applique sur BC, FG devient perpendiculaire à cette dernière droite et couvre exactement FH.

65. Des droites AB, AC, AD (P. I, F. 51), qui

se rencontrent ou se coupent au même point A, sont nommées *concourantes*, pour abréger.

Si des parallèles EF, GH, BD, divisent une concourante AB en parties égales, elles divisent toutes les autres AC, AD, de la même manière.

Je dis, par exemple, que de BG=GE, résulte DH=HF. En effet, les angles correspondans B,G sont égaux (47), et par conséquent, les perpendiculaires GI, EK sont égales (60). Mais GI=HL, EK=FM, si HL et FM sont aussi d'équerre sur les parallèles (45). Donc HL=FM, et à cause de l'égalité des angles correspondans D,H, les obliques DH, HF sont de même longueur.

Réciproquement, *lorsque des droites EF, GH, BD divisent des concourantes AB, AD en parties égales, elles sont parallèles.*

De là un moyen de *diviser en parties égales une droite AB donnée sur le papier ou sur le terrain.* (P. I, F. 52). Supposons qu'on veuille trois parties.

Tracez par une des extrémités, la droite quelconque AC, et portez dessus la longueur arbitraire AG, une fois de plus que AB doit avoir de parties, c'est-à-dire 4 fois, dans le cas actuel. Joignez les extrémités C, B, et prenez sur le prolongement de CB, BH=BC. La droite IH tirée du 2e point de division de CA, à partir de C, coupera AB de manière que BL en sera le tiers, et si vous portez BL de L en K, les parties BL, LK, KA de AB seront égales (*).

En effet, si l'on joint B au 1er point de division de CA, BE, IH, seront parallèles, puisqu'elles diviseront en parties égales les concourantes HC, IC, et si, par G, 3e point de division de CA, on tirait GK, parallèle à IH, les parallèles BE, LI, KG qui diviseraient la concourante EA en trois parties égales, diviseraient la concourante BA de la même manière. Donc, BL est bien le tiers de BA.

Afin de pouvoir marquer le point L très-exactement, il faut faire en sorte que IH soit presque d'équerre sur AB. Il en sera ainsi, quand on prendra la longueur arbitraire AG assez grande pour que AE surpasse un peu AB.

(*) Ce procédé, d'une extrême simplicité et d'un emploi tout aussi facile sur le terrain que sur le papier, m'a été communiqué par M. *Chenou*, proviseur du collége royal de Metz, et ancien professeur des cours industriels de Douai.

66. *Des parties de parallèles AB, CD* (P. I, F. 53), *comprises entre des parallèles AC, BD, sont égales.*

Cela est vrai pour les perpendiculaires AE, CF, puisqu'elles sont parallèles, et qu'elles mesurent les distances des points A, C à la droite BD (45). Mais les angles correspondans ABF, CDF sont égaux (47). Conséquemment, les obliques AB, CD ont même longueur (60).

Il est vrai aussi que *des droites AB, CD qui comprennent entre elles des parties égales de parallèles AC, BD, sont parallèles et égales.*

67. Les parallèles et les concourantes qu'elles coupent, ont des relations plus générales que celles du n° 65. D'abord, *les parties AG, GB d'une concourante se contiennent autant de fois que les parties AH, HD d'une autre* (P. I, F. 51). Si, par exemple, GB est contenu 2 fois dans AG, HD sera contenu 2 fois dans AH. En effet, par le point E milieu de AG, menons EF parallèle à BD; AD sera divisé en trois parties égales aux points F, H, comme AB aux points E, G (65), et il sera évident que HD est moitié de AH, comme GB est moitié de AG.

En second lieu, les parties AB, AG, prises sur une concourante, depuis les parallèles jusqu'au point de concours, se contiennent comme les parties AD, AH, prises de la même manière, sur une autre concourante. Vous voyez effectivement que AG comprend les $\frac{2}{3}$ de AB, et que AH comprend les $\frac{2}{3}$ de AD. Donc, *des concourantes sont divisées de la même manière, par des parallèles.*

En troisième lieu, *les parties de parallèles GN, BC se contiennent comme les distances GA, BA de leurs extrémités correspondantes G, B au point de concours A.* Soit GO parallèle à AC; d'après les deux principes précédens, BC contiendra OC, comme BA contient GA. Or, OC=GN (66).

Enfin, les parties de parallèles BC, GN se contiennent comme les parties CD, NH. Cela résulte de ce que BC, GN se contiennent comme CA, NA, et de ce que CD, NH se contiennent aussi comme CA, NA. Par conséquent, *des parallèles sont divisées de la même manière, par des concourantes.*

Réciproquement, *si une de ces 4 relations a lieu, les droites qui coupent les concourantes sont parallèles.*

68. C'est sur les relation des concourantes et des

parallèles, qu'est fondée la construction de *l'angle de réduction* et de *l'échelle des parties.*

L'angle de réduction est utile pour copier en petit un tracé, un dessin exécuté en grand ; il fait éviter des mesurages et des calculs fort longs.

Voulez-vous, par exemple, réduire des droites au tiers, c'est-à-dire donner aux lignes de la copie, le tiers seulement de la longueur des lignes correspondantes du modèle? tirez une droite AB (P. I, F, 54); portez-y trois fois une longueur quelconque, de A en C ; décrivez du même point A et avec AC pour rayon, un arc CD dont la corde soit sensiblement plus grande qu'une des trois parties de AC ; de C, avec une de ces parties, décrivez un second arc qui coupe le premier, et joignez l'intersection E au point A.

Il est tout aussi facile de se servir de l'angle de réduction BAE, que de le construire. Pour réduire au tiers, la droite FG, par exemple, vous la porterez de A en G′ (*), et de la même ouverture de compas, vous marquerez un point G″ sur AE; la distance G′ G″ sera le tiers de FG.

En effet, la droite qui joindrait G′ et G″, serait parallèle à la corde CE, puisque AC contient AG′ comme AE contient AG″, et par suite, cette droite G′ G″ est le tiers de AG′, comme CE est le tiers de AC.

Il est visible que pour réduire des droites au quart, au cinquième, il faudrait former un autre angle, en portant quatre, cinq parties égales sur AB.

69. Une *échelle* est une droite divisée qu'on place sur le papier, pour construire en petit, un tracé dont les lignes ont été mesurées. Chacune des parties égales de l'échelle répond à l'unité de mesure ou à un certain nombre de ces unités. Si, par exemple, les parties sont des centimètres réels, chacun de ces centimètres représentera soit un mètre réel, soit 10 mètres, etc. Pour faire sur le dessin, une droite qui, sur le terrain, aurait 50 mètres, on prendrait, dans le premier cas, 50 parties ou centimètres de l'échelle, et le tracé serait *au centième*, puisqu'un centimètre est le centième d'un mètre; dans le second cas, on prendrait seulement 5 parties de l'échelle, et le tracé serait *au millième*, parce que un centimètre est la millième partie de 10 mètres.

(*) G′ se prononce G *prime*, G″ se prononce G *seconde*, G‴ se prononce G *tierce*, G^{IV} se prononce G *quarte*.

Mais, outre ses parties principales, une échelle doit en présenter encore d'autres qui donnent les dixièmes, et quelquefois les centièmes de son unité, ou qui permettent de réduire exactement et aisément les dixièmes, les centièmes de l'unité de mesure. Si cette unité est le mètre, il faut que l'échelle donne réduits les décimètres, les centimètres ; et souvent la longueur qui représente le mètre, n'est pas assez grande pour qu'on y marque distinctement et avec exactitude, même les parties représentatives des décimètres. C'est ce qui arrive notamment lorsqu'on adopte le millimètre pour mètre ou que le dessin doit être au millième. Dans un tel cas, on construit sur le millimètre, ce qu'on appèle l'*échelle des parties*, au moyen de laquelle on peut prendre exactement et facilement les décimètres réduits, et approximativement les centimètres.

Soit AB la partie de l'échelle qui représente le mètre (P. II, F. 1). Par les points A, B, vous tracerez deux parallèles : on les fait ordinairement perpendiculaires à AB. Sur chacune, vous porterez 10 fois une longueur arbitraire, aussi grande que le permettra la place destinée à l'échelle; vous numéroterez les points de division, en partant de AB; vous joindrez par des droites les points de même numéro, et enfin vous tirerez une droite de A au point 10 de B 10'.

Les droites AB, 1.1', 2.2', 3.3', etc., sont parallèles et égales, puisqu'elles renferment entre elles des parties égales de parallèles (66). Par conséquent (67), 1C est le dixième de 10.10' ou de AB, comme A1 est le dixième de A 10; 2D vaut deux dixièmes de 10.10' ou de AB, comme A2 vaut deux dixièmes de A10; 9E vaut neuf dixièmes de AB, comme A9 vaut neuf dixièmes de A10. De même, à partir des numéros de B10', $1'C=\frac{9}{10}$, $2'D=\frac{8}{10}$, $9'E=\frac{1}{10}$. Vous concevez que pour pouvoir prendre ces dixièmes avec exactitude, il faut rendre A10' le moins oblique qu'il est possible sur les parallèles 1.1', 2.2', etc., ou faire A10, B10' aussi longues qu'on le peut; car le véritable point d'intersection de deux droites se distingue d'autant plus aisément, que ces droites sont plus près d'être d'équerre.

Ordinairement, l'échelle d'un dessin, d'un plan, a deux parties : les divisions de l'une donnent les unités réduites, par groupes de 5, de 10, etc. ; les divisions de l'autre donnent chacune une seule unité. Les premières sont numérotées 0, 5, 10, etc., ou 0, 10, 20, etc., de gauche à droite ; les dernières sont numérotées 0, 1, 2, 3, etc., de droite à gauche, et à chacune de celles-ci est adaptée une

échelle des parties, comme le représente la figure 2 (P. II). De plus, les dix parallèles communes à ces échelles des parties, sont continuées jusqu'au bout de l'échelle principale et arrêtées à une droite 10.10, par exemple, menée par l'extrémité 10, parallèlement aux obliques 5.5, 4.4, etc. Une parallèle aux mêmes obliques est aussi tirée par tous les autres points de divisons 0, 5, etc., de l'échelle principale, et chaque oblique reçoit à son extrémité inférieure, le même numéro qu'à son extrémité supérieure. Les parallèles à l'échelle principale sont aussi numérotées de la même manière aux deux bouts.

C'est des obliques et des parallèles à l'échelle principale qu'on se sert le plus souvent. Voulez-vous, par exemple, prendre une longueur réduite de $11^m,45$? Comme elle renferme 4 dixièmes de mètre, vous posez l'une des pointes du compas à l'extrémité de droite de la parallèle 4.4, et l'autre à l'intersection de cette parallèle et de la perpendiculaire 1.2; vous avez alors exactement $11^m,4$; car il y a 10^m du point 4 de droite au point A, comme de 10 à 0 sur l'échelle principale; il y a 1^m de A à B et 4 décimètres de B à C. Pour avoir les 5 centimètres, vous augmenterez un peu l'ouverture de compas, de manière à prendre à gauche de C, la moitié de 1 D, attendu que 5 centimètres forment la moitié de 1 décimètre. Cette moitié de 1 D s'estime à vue.

Supposons encore que vous ayez à faire sur le dessin, une droite qui ait en réalité $7^m,80$. Vous chercherez sur la dernière oblique, marquée ici 10.10, le n° 8 qui est égale au nombre des décimètres; vous poserez l'une des pointes du compas à l'intersection de la parallèle 8.8 et de l'oblique qui est numérotée 5 sur l'échelle principale, parce qu'il n'y a qu'une fois 5 dans 7; vous placerez l'autre pointe à l'intersection de la même parallèle et de la perpendiculaire qui est numérotée 2 sur l'échelle principale, attendu que 5 et 2 font 7, et vous aurez une ouverture de $7^m,80$. Ainsi, les décimètres de la longueur à prendre indiquent la parallèle; les mètres, comptés sur l'échelle principale, indiquent l'oblique d'où il faut partir et la perpendiculaire à laquelle on doit s'arrêter.

70. Lorqu'on élève une perpendiculaire en un point quelconque A d'un diamètre BC (P. II, F. 3) et qu'on prolonge cette perpendiculaire AD jusqu'à la circonférence, d'un seul côté, on a trois droites AB, AD, AC qui jouissent d'une relation remarquable: *la demi-corde AD perpendiculaire au diamètre, en contient la petite partie*

AB, autant de fois qu'elle-même est contenue dans la grande AC. La droite AD est dite, pour cette raison, *moyenne proportionnelle* entre les deux parties du diamètre.

Trouver la moyenne proportionnelle de deux droites données, est une opération à laquelle conduisent assez souvent les problèmes de géométrie.

Pour faire ce tracé, vous tirerez une droite BC, sur laquelle vous porterez les deux droites données *b*, *c* (*) : la première de B en A, la seconde de A en C ; puis vous chercherez le milieu de BC (43) ; de ce milieu E, avec la moitié de BC pour rayon, vous décrirez une demi-circonférence, et au point A, jonction des deux droites données, vous éleverez une perpendiculaire sur BC ou vous menerez une parallèle à FG, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, en D. Cette perpendiculaire ou parallèle AD sera la moyenne proportionnelle cherchée, c'est-à-dire qu'elle contiendra AB ou *b*, comme elle sera contenue dans AC ou *c*.

MESURAGE DES DROITES.

71. Chacun sait mesurer grossièrement une ligne droite, quand la mesure peut y être appliquée d'un bout à l'autre; mais peu de personnes se font une juste idée de la difficulté qu'on éprouve pour mesurer une droite très-exactement. Cette difficulté est telle que rarement on obtient la même longueur, en recommençant l'opération. Aussi, dans tous les cas où une grande exactitude est nécessaire, faut-il ne s'en tenir ni au premier, ni au second mesurage: *on doit mesurer trois, quatre et même cinq fois, avec toute la précision possible, additionner toutes les longueurs trouvées et diviser leur somme par leur nombre.* Le quotient donne une *longueur moyenne* souvent moins inexacte qu'aucune des autres, à cause d'une espèce de compensation qu'a opérée le calcul, entre les erreurs en plus et les erreurs en moins.

Supposez que la vraie longueur d'une droite soit $4^m,358$ et que vous l'ayez trouvée de $4^m,359$ par un premier mesurage, de $4^m,357$ par un deuxième, de $4^m,3585$ par un troisième. La somme de ces 3 longueurs est $13^m,0745$. Divisant par 3, vous obtenez $4^m,3581$ pour longueur moyenne, et vous n'avez plus qu'un seul dixième de millimètre d'erreur; tandis que l'erreur serait d'un millimètre ou d'un demi-millimètre en plus, si vous vous en teniez au premier

(*) *b* se prononce *petit b*; *c* se prononce *petit c*.

ou au troisième mesurage, et d'un millimètre en moins, si vous adoptiez le second.

A la vérité, toutes les erreurs pourraient être en plus : vous auriez pu trouver, par exemple, $4^m,359$ la 1re fois, $4^m,3586$ la 2e fois, $4^m,3585$ la 3e fois et dans ce cas la longueur moyenne $4^m,3587$ serait plus inexacte que les deux dernières; mais elle le serait moins que la première; et dans l'ignorance où vous êtes de la vraie longueur d'une droite que vous mesurez, il est possible que vous regardiez comme le meilleur, le mesurage le plus mauvais. Mieux vaut certainement s'exposer à faire une erreur de quelque peu supérieure aux plus faibles, que de risquer d'en commettre une égale à la plus forte. Ainsi, lors même que toutes les erreurs sont en plus, c'est encore un parti sage que de prendre la moyenne des longueurs trouvées, et cette conclusion est évidemment applicable au cas où toutes les erreurs sont en moins.

Pour éviter de faire des marques, toujours causes d'inexactitude, il convient d'employer deux mesures rigoureusement égales, quand il sagit de déterminer avec une grande précision, la longueur d'une ligne droite. On les pose bout à bout, en évitant de les heurter l'une contre l'autre et de laisser le moindre intervalle entre elles. Si l'unité, le mètre par exemple, n'est pas contenu un nombre exact de fois dans la longueur, on mesure la partie restante avec le décimètre, le centimètre et même le millimètre.

72. Il y a plusieurs cas à considérer, dans le mesurage des droites sur lesquelles la mesure ne peut être appliquée: ces droites sont horizontales ou verticales ou inclinées, et dans chacune de ces positions, une au moins de leurs extrémités a des abords qui permettent d'y opérer, ou bien ni l'une ni l'autre n'en laisse la facilité.

Mesurer la longueur horizontale d'une rampe AB (P. II, F. 4).

Trois personnes sont nécessaires pour cette opération : deux placent et maintiennent la mesure, le quadruple mètre par exemple; la 3e manie le niveau de maçon (60).

Plantez un jalon en A et un autre en B; posez une des extrémités de la mesure en A, et dirigez cette mesure dans l'alignement AB; puis haussez ou baissez l'autre extrémité, jusqu'à ce que le niveau montre que le quadruple mètre est horizontal. Appliquez alors à cette extrémité un fil-à-plomb, et marquez sur le terrain, le point C qu'il indique.

Ensuite, placez en C le bout de la mesure qui était en A, dirigez cette mesure dans l'alignement CB, haussez ou baissez l'autre bout, jusqu'à ce que le niveau montre que le quadruple mètre est horizontal, appliquez le fil-à-plomb à ce même bout, et continuez toujours ainsi jusqu'en B.

Lorsque le terrain est accidenté, il est possible qu'un des points donnés par le fil-à-plomb, se trouve dans un creux, comme en D. Il faut alors planter un jalon au point D, le rendre vertical au moyen du fil-à-plomb, et appliquer un des bouts de la mesure contre ce jalon, afin de pouvoir la placer horizontalement au-dessus de la saillie E.

Il est visible que le nombre de fois qu'on pourra porter ainsi la mesure sur la rampe, donnera la vraie longueur de la droite horizontale AB′ ou BA′.

Si l'on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on peut se contenter du coup d'œil, pour placer la mesure horizontalement, et remplacer le fil-à-plomb par un petit cailloux qu'on laisse tomber de l'extrémité d'où doit partir une verticale. Ceux qui mesurent avec la chaîne d'arpenteur, agissent ainsi; seulement, au lieu de laisser tomber une pierre, ils laissent tomber une fiche qu'ils plantent ensuite. Auparavant, la chaîne doit être fortement tendue, afin que l'erreur qui résulte de la courbure causée par le poids, soit très-petite.

Ce sont ces moyens qu'il faut employer, pour mesurer toutes les distances horizontales qu'on peut parcourir, quand le terrain est raboteux ou en pente.

73. Voici maintenant les principes sur lesquels repose le mesurage des droites qui ne peuvent être parcourues.

Quatre points donnés A, 1, 2, 3 (P. II, F. 5), *joints deux à deux, par six droites* A1, A2, A3, 1.2, 1.3, 2.3, *produisent en général trois points* B, 4, 7, *où concourent les droites deux à deux, et un de ces concours est toujours un croisement.* Dans la figure, c'est le point 7 : les lignes A3, 1.2 s'y coupent, s'y croisent.

La droite qui passe par le croisement 7 et l'un des deux autres concours, la droite 4.8 par exemple, *partage en deux parties inégales A8*, 8.1, *la distance A1, de deux points donnés.*

Si l'on multiplie la somme A1 de ces deux parties par la plus petite A8, et qu'on divise le produit par leur différence 8.1—*A8, on obtient la distance du* 3e

concours B, au point donné A qui termine la plus petite partie. Ce principe est exprimé plus brièvement par la formule $d=\frac{P+p}{P-p}\times p$ dans laquelle d représente la distance AB, P la grande partie 8.1 et p la petite partie A8.

74. *Mesurer la distance horizontale de deux points A, B séparés par une rivière* (P. II, F. 5).

Plantez un premier jalon sur l'alignement AB, un second jalon hors de cet alignement, un 3e sur l'alignement B2 et peu éloigné du 2e, un 4e à la rencontre des alignemens A2 et 1.3, un 5e sur l'alignement 1.2, un 6e sur l'alignement A3, un 7e à la rencontre des alignemens 5.2 et 6.3, enfin un 8e à la rencontre des alignemens 4.7 et AB (62). Mesurez ensuite la distance A8 et la distance 8.1; faites la somme de ces deux longueurs; multipliez-la par la plus petite A8 et divisez le produit par l'excès de 8.1 sur A8. Le quotient sera la distance de A à B (73).

Si, par exemple, A8=4 mètres et que 8.1=6 mètres, la formule du n° 73 donne $d=\frac{6+4}{6-4}\times 4^m=\frac{10}{2}\times 4^m=\frac{40^m}{2}=20^m$.

Ce procédé s'applique à tous les cas où B est visible de A et où l'on ne peut pas cheminer en ligne droite de A jusqu'à B. Vous pouvez, par exemple, l'employer pour mesurer la largeur d'une rivière (P. II, F. 6): vous choisissez alors un point remarquable B, sur le bord qui vous est opposé, puis un point A, sur le bord où vous êtes, de manière que la droite BA soit à très-peu-près d'équerre avec les deux rives.

75. *Mesurer la distance horizontale de deux points A, B séparés par un bois* (P. II, F. 7).

Comme le bois empêche de voir le point B, quand on est au point A, il n'y a pas moyen de débuter par le placement d'un jalon sur l'alignement AB. Le procédé qui précède n'est donc pas applicable; du moins il doit être modifié.

Plantez un premier jalon en un point d'où vous puissiez voir à la fois A et B; puis un 2e et un 3e jalon dans l'alignement A1, un 4e dans l'alignement B2, un 5e à la rencontre des alignemens B1 et 3.4, un 6e dans l'alignement 5.2, un 7e dans l'alignement 1.4, un 8e à la rencontre des alignemens 6.2 et 7.4, un 9e dans l'alignement A5, un 10e

à la rencontre des alignemens 9.5 et 3.8, un 11e à la rencontre des alignemens 1.10 et 3.5. Ce 11e jalon se trouvera nécessairement sur l'alignement BA. Mettez ensuite un 12e jalon dans l'alignement 11A, et enfin un 13e à la rencontre des alignemens 12A et 3.10. Il ne vous restera plus qu'à mesurer les distances A13 et 13.11 pour les employer comme précédemment : vous multiplierez leur somme par la plus petite et vous diviserez le produit par leur différence.

Si, par exemple, A13=5m et que 13.11=5m,04, vous trouverez que $AB=\frac{10^m,04\times5}{0,04}=\frac{50^m,20}{0,04}=1255^m$.

Ce procédé s'applique à tous les cas où il s'agit de mesurer la distance horizontale de deux points dont l'un est invisible de l'autre.

76. C'est absolument la même figure qu'il faut faire et répéter, pour *prolonger une droite AB au delà d'un obstacle qui ne permet pas de s'aligner sur les points A, B* (P. II, F. 8).

Le tracé revient à déterminer, au delà de l'obstacle, deux points qui soient situés sur l'alignement AB.

Plantez un 1er et un 2e jalon sur un alignement 2.1 que n'interrompe point l'obstacle, et plus rapprochés entre eux que A, B; placez un 3e jalon à l'intersection des alignemens B2 et A1, un 4e sur l'alignement B1, un 5e à la rencontre des alignemens 4B et 2A, un 6e à l'intersection des alignemens 2.4 et 3.5, un 7e à la rencontre des alignemens 1.6 et 2A, un 8e enfin à la rencontre des alignemens 1.2 et 4.7. Le point 8, ainsi déterminé, sera sur le prolongement de AB.

Pour obtenir un 2e point, vous répéterez à droite de AB, le jalonnement qui vient d'être fait à gauche, en prenant toutefois la précaution de placer les deux premiers jalons de manière que leur alignement laisse à droite de l'opérateur, l'obstacle et le point 8 déjà trouvé.

77. Vous ferez encore une figure analogue à celle du n° 75, si vous avez à *déterminer une direction qui doive passer par un point A et concourir avec deux autres directions BC, DE dont le point de rencontre soit invisible* (P. II, F. 9).

Vous planterez un 1er jalon au point A, un 2e et un 3e sur BC, un 4e sur DE, un 5e à la rencontre de DE et de l'alignement 2A, un 6e à la rencontre des alignemens 4.3 et 5.2, un 7e à l'intersection des alignemens 2.4 et 3.5,

un 8e à celle des alignemens 3A et 7.6, un 9e enfin à celle des alignemens 4.6 et 8.2. Les deux jalons 1 et 9 détermineront un alignement qui, s'il était prolongé, passerait par le point de concours de BC et de DE.

Ce jalonnement peut être converti en un tracé propre à la même opération sur le papier. Si BC, DE sont deux droites qui aillent se couper hors de la feuille, et qu'il faille tracer, par le point A, une 3e droite qui concoure au même point que les deux premières, vous couperez BC, DE par deux concourantes quelconques 2.6 et 3.6, dont l'une passe par A; vous ferez le croisement 7, en tirant les droites 2.4 et 3.5; vous joindrez les points 6 et 7, en prolongeant la droite 6.7 jusqu'à BC; enfin vous tirerez 3A, pour marquer le point 8, et 2.8 pour marquer le point 9. La droite A9, ainsi déterminée, passerait par le point où se couperaient BC et DE, si ces trois lignes pouvaient être prolongées.

78. *Mesurer la distance horizontale de deux clochers A, B situés au-delà d'une rivière* (P. II, F. 10).

Plantez un jalon C sur l'alignement AB; mesurez la distance CA et la distance CB (74); puis retranchez CA de CB; la différence sera la distance AB cherchée.

Ce moyen s'applique à tous les cas où il s'agit de mesurer la distance horizontale de deux points, près desquels on ne peut opérer, mais dont il est possible de voir l'alignement : par exemple, deux clochers entourés de maisons.

79. *Mesurer la distance horizontale de deux clochers A, B fort éloignés de l'opérateur* (P. II, F. 11).

Si l'éloignement où l'on est des clochers empêche de se porter sur leur alignement, vous planterez un jalon en un point C d'où vous puissiez voir A et B, puis vous mesurerez CA et CB (74). Supposons que la distance CA soit de 1800 mètres et que la distance CB soit de 2025m. Vous planterez, sur ces alignemens, des jalons D, E, de manière que les distances CD, CE forment la même fraction de CA et de CB, le centième par exemple; et pour cela vous porterez 18 mètres sur CA à partir de C, puis 20m,25 sur CB aussi à partir de C. Alors la droite DE se trouvera parallèle à la droite AB et en sera aussi la centième partie (67). Mesurez donc DE et multipliez sa longueur par 100, vous aurez pour produit la distance AB. Si, par exemple, DE contient 12m, AB en

contiendra 1200; dans le cas où CD serait le millième de CA et CE le millième de CB, DE serait aussi la millième partie de AB, et pour avoir cette distance AB il faudrait multiplier par 1000 la longueur de DE.

C'est ainsi qu'il faut opérer, toutes les fois qu'il s'agit de mesurer la distance horizontale de deux objets dont on ne peut approcher, et sur l'alignement desquels on ne saurait se placer: par exemple, les sommets de deux hautes montagnes, deux villages situés sur les versans opposés d'une côte.

80. *Mesurer la hauteur d'un clocher* (P. II, F. 12). Plantez bien verticalement deux jalons CD, EF, dans un terrain de niveau et sur un alignement CG dirigé vers l'axe AB de la tour; visez le sommet A, par l'extrémité du plus petit; faites marquer le point H où l'alignement DA coupe le grand jalon; mesurez les verticales CD, EH, les horizontales CE, EG et la distance GB du point G à l'axe AB de la tour; cherchez l'excès de EH sur CD et la somme de CE, EG, GB; puis divisez l'excès de EH par CE. Si vous avez mesuré au mètre, par exemple, le quotient sera l'excès sur CD, d'un jalon qui serait planté à un seul mètre du point C; ce quotient vous fera connaître ce qu'on appèle la *pente* de la droite DA, car il vous indiquera de combien cette droite s'élève verticalement, par mètre de distance horizontale. Par conséquent, pour savoir de combien la même droite s'élève de D en I, ou pour déterminer la hauteur AI, vous n'aurez plus qu'à multiplier le quotient par la distance horizontale DI ou CB. Ajoutant enfin à IA, la longueur du jalon CD, vous trouverez la hauteur AB, c'est-à-dire l'élévation du point A au-dessus de l'horizontale CE.

Soit H la hauteur AB, G le grand jalon EH, p le petit jalon CD, d la distance CE, D la distance CB, on a pour formule $H=\frac{G-p}{d}\times D+p$.

Supposons que $CD=1^m,66$, $CE=3^m$, $EH=3^m,16$, $EG=262^m,68$ et que $GB=15^m$. CB ou D sera de $280^m,68$ et la formule donnera $H=\frac{3,16-1,66}{3}\times 280,68+1,66=142^m$. Cette hauteur est précisément celle du clocher de Strasbourg, l'édifice le plus élevé de l'Europe.

Ce procédé, simple, prompt et suffisamment exact, est propre au mesurage de la hauteur de tout édifice, des ar-

bres sur pied, et en général de tous les objets qu'on peut approcher. Quand il s'agit d'arbres, on ne peut mesurer BG; mais comme cette longueur est celle du rayon du tronc pris à fleur de terre, on emploie pour la trouver, le moyen qui sert à déterminer le rayon d'un cercle (22).

Observez que la main d'un homme ne pouvant pas toujours atteindre à la hauteur du point H, il convient d'adapter au grand jalon, un objet quelconque qui serve d'*indicateur*, qu'on puisse faire monter ou descendre, à l'aide d'une perche terminée en crochet, et qui conserve bien sa position. Une feuille de carton ou de papier traversée par le jalon, suffit pour former un tel indicateur.

81. *Mesurer la hauteur AB d'une montagne* (P. II, F. 13).

La hauteur d'une montagne est celle de la verticale AB qui part du sommet A et vient rencontrer le terrain de la plaine au point B dont on ne peut approcher. Pour la déterminer, il faut, comme dans le cas précédent, aligner deux jalons CD, EF sur le sommet A, et diviser par la distance horizontale CE, l'excès de la hauteur verticale EH sur le petit jalon, afin d'avoir la pente de DA. Cela fait, on mesure l'horizontale CB ou l'horizontale AK. Vous emploierez à cet effet le procédé du nº 74, en vous alignant sur le sommet A; il est plus court que celui du nº 72, et d'ailleurs, si la montagne est fort escarpée, ce dernier est impraticable. Enfin, le produit de la pente multipliée par la distance CB, fait connaître l'élévation de A au-dessus de l'horizontale DI, et pour avoir AB, il ne s'agit plus que d'ajouter à AI, la longueur CD du petit jalon.

C'est ainsi qu'on peut mesurer la hauteur verticale de tout objet dont on ne saurait approcher, ou dans l'intérieur duquel il est impossible de pénétrer.

82. *Mesurer la longueur d'une rampe AB, qu'on ne peut parcourir* (P. II, F. 14).

Mesurez la distance horizontale BC (74) et la hauteur AC (81); puis, tracez sur un terrain uni, deux droites d'équerre, comme AC et BC; portez sur l'une de *c* en *a*, autant de centimètres ou de millimètres que CA contient de mètres, et sur l'autre, de *c* en *b*, autant de centimètres ou de millimètres que CB contient de mètres. Tracez ensuite la droite *ab*, et mesurez-la en centimètres ou en millimètres; autant elle en contiendra, autant la droite inclinée AB contiendra de mètres.

Si, par exemple, AC=40^m,36 et que BC=182^m,5, vous prendrez *ac* de 0^m,4036 ou à très-peu-près de 403 millimètres et demi, centième partie de AC, et *bc* de 1^m,825, centième partie de BC. Alors *ab* sera aussi la centième partie de AB, et comme vous trouverez que *ab*=1^m,869, vous en conclurez que AB=186^m,9 à fort peu près.

Mais, il est plus simple et plus exact de calculer la longueur de AB au moyen du procédé du n° 106. Il vous donnera pour cette longueur 186^m,909.

FACES DES CORPS.

83. De même que les arêtes des corps sont droites ou courbes, leurs faces sont planes ou courbes.

Une face est *plane*, quand la règle peut y être appliquée de toute sa longueur, dans tous les sens: le tableau noir, un plancher bien fait, le côté poli du dessus de marbre d'un meuble, sont des faces planes.

Une face est *courbe*, lorsque la règle ne peut s'y appliquer de toute sa longueur, dans tous les sens: la voûte d'une cave, celle d'un pont, celle d'un four, sont des exemples de faces courbes: la règle ne peut toucher les deux premières sur toute sa longueur, que dans un seul sens; elle ne saurait, dans aucun sens, reposer par tous ses points sur la dernière.

L'ensemble des faces d'un corps constitue la *surface* de ce corps: la surface intérieure d'un four, par exemple, se compose de la face courbe qui forme la voûte et de la face plane sur laquelle on dépose les pains. La surface d'un tonneau comprend les faces planes des deux fonds et la face courbe qui les sépare.

Un corps qui n'a point d'arêtes, comme une boule, un œuf, un anneau rond, n'a qu'une seule face qui fait à elle seule la surface.

PLANS.

84. Nous avons étudié les arêtes ou lignes indépendamment des corps auxquels elles peuvent appartenir; nous agirons encore ainsi pour les faces planes.

Une face plane est toujours limitée, et elle l'est soit par des droites, soit par des arcs de cercle, soit par un cercle entier; mais de même qu'une ligne droite peut être prolongée par la pensée, autant qu'on veut, au-delà de ses

extrémités, une face plane peut être conçue prolongée au-delà de ses limites. Considérée de la sorte, elle est illimitée et prend le nom de *plan*. C'est ainsi qu'on la considère et qu'on la nomme toujours, en l'étudiant sous le rapport des différentes positions qu'elle peut avoir, afin de faire entendre que les propriétés qui lui sont reconnues et les procédés qui en dérivent, ne dépendent nullement de la forme des limites et sont applicables à toute face plane d'un corps quelconque.

85, Parmi toutes les positions que peut prendre un plan, il en est deux très-remarquables : la position verticale et la position horizontale. *Un plan est vertical dès que le fil-à-plomb, librement suspendu, s'y applique sur toute sa longueur*, ou bien dès que ce fil en cache à l'œil toute l'étendue. La face intérieure d'un mur de maison est dans ce cas. Il n'en est pas de même de la face extérieure, à cause du léger talus ou *fruit* qu'y exige la solidité.

Un plan est horizontal ou de niveau, lorsque deux droites concourantes qu'on y a tracées à volonté, sont elles-mêmes horizontales (44) : un plancher bien fait, le tapis d'un billard, la surface des eaux tranquilles sont des plans horizontaux. Ils suffit donc, pour reconnaître si un plan est horizontal, d'y placer le niveau sur deux directions qui se coupent. Il y a plus d'exactitude dans une telle vérification, quand les deux directions sont à peu-près d'équerre.

Un plan qui n'est ni horizontal, ni vertical, est dit incliné : les faces d'un toit sont donc des plans inclinés (*).

86. Quelle que soit la position d'un plan, une droite peut être perpendiculaire ou parallèle ou oblique à ce plan.

Une droite est perpendiculaire sur un plan, quand elle l'est sur deux droites de ce plan, qui se croisent à son pied. Alors, elle ne penche ni dans un sens, ni dans aucun autre, ou ce qui revient au même, elle est d'équerre sur toutes les droites du plan qui la rencontrent.

La direction du fil-à-plomb ou la verticale est donc perpendiculaire au plan horizontal qu'elle perce ; car elle l'est à toutes les horizontales qui peuvent être tracées par son pied, sur le plan (44).

(*) Les moyens de la Géométrie élémentaire ne permettent point de représenter exactement, sur le tableau, les positions des plans, celle du plan vertical exceptée. Il faut pour les autres, se servir de planchettes ou de cartons, et ne jamais faire de figures en perspective : elles peuvent donner des idées fausses aux élèves.

La distance d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire qu'on y abaisse de ce point, parce qu'une telle droite est la plus courte de toutes celles qui peuvent être menées du point jusqu'au plan (41).

Planter une tige perpendiculairement sur un plan.

Disposez deux équerres de manière qu'une des petites arêtes de l'une se confonde avec une des petites arêtes de l'autre, sans que les deux instrumens aient d'autres points communs; posez-les ensuite sur le plan, par les deux petites arêtes non accolées, et placez la tige le long de celles qui se confondent. La direction de cette tige sera évidemment alors perpendiculaire à deux droites du plan. Pour plus d'exactitude, il convient que les deux petites arêtes non accolées fassent à-peu-près un angle droit.

Si la tige devait contenir un point marqué hors du plan, il faudrait que la droite des deux arrêtes accolées passât par ce point.

87. *Une droite est parallèle à un plan, lorsque deux de ses points en sont également éloignés*, ou lorsqu'il y a entre ces points et le plan, deux parallèles égales.

Toute horizontale située hors d'un plan horizontal, lui est parallèle, parce que les verticales qui vont de la droite au plan, sont toutes de même longueur.

Toute verticale située hors d'un plan vertical, lui est parallèle, parce que les horizontales qui vont de la droite au plan, sont toutes de même longueur.

Placer une barre parallèlement à un plan.

Tracez d'abord sur le plan, la direction que doit avoir la barre; puis, si le plan est vertical, plantez-y deux tiges perpendiculairement et sur la droite tracée; s'il est horizontal ou incliné, plantez-y deux tiges verticales. Dans tous les cas, portez sur ces tiges, à partir du plan, deux longueurs égales. Par là vous déterminerez deux points, et il vous restera à placer la barre de façon qu'une de ses longues arêtes ou une de ses lignes droites parallèles aux longues arêtes, passe par ces deux points.

La distance de la barre au plan ou un point de sa position est quelquefois donnée. Il faut alors planter les deux tiges perpendiculairement au plan, quel qu'il soit, et marquer sur ces tiges deux points qui se trouvent éloignés du plan autant que doit l'être la barre ou le point donné.

88. *Une droite est oblique par rapport à un plan, si elle*

n'est ni perpendiculaire, ni parallèle. Lorsque le plan est horizontal, l'oblique est toujours une ligne inclinée, parce qu'elle n'est alors ni verticale, ni horizontale (44). On détermine ordinairement la position d'une ligne inclinée, au moyen de sa *pente*, c'est-à-dire au moyen de la différence des distances d'un plan horizontal à deux points de cette droite écartés horizontalement d'une unité de longueur (80).

Placer une pièce de charpente selon une pente donnée. Tracez, sur le terrain du chantier, deux droites d'équerre *ac*, *bc* (P. II, F. 14). Si la pente est de 68 centimètres par mètre, comme doit être celle des chevrons d'un toit en tuiles plattes, dans ce pays-ci, vous porterez un mètre de *c* en *b* et 68 centimètres de *c* en *a*; puis vous tirerez la droite *ab* qui sera la direction de la pièce de charpente. Mais, pour que cette direction fût très-exacte, il faudrait au lieu d'un mètre, porter 3 ou 4 mètres de *c* en *b* et 3 ou 4 fois 68 centimètres de *c* en *a*: la pente serait la même, les points *a*, *b* se trouveraient plus éloignés l'un de l'autre, et la petite erreur que vous pourriez commettre en plaçant la règle ou le cordeau sur ces points, altérerait beaucoup moins la vraie direction cherchée.

La figure *abc* étant relevée sur *bc* verticalement, montre que la pièce de charpente, placée selon *ab*, ferait avec l'horizontale *bc*, un angle *b* dépendant de la pente. Vous pourriez donc aussi déterminer la position de la pièce, au moyen de cet *angle de pente*. Comme il est le plus petit des angles que ferait *ab* avec toutes les horizontales menées par *b*, c'est celui-là qu'on a en vue, quand on parle de l'angle fait avec le plan horizontal, par une droite inclinée *ab*, de même qu'on veut désigner la plus courte des droites qui peuvent être menées d'un point à une ligne ou à un plan, lorsqu'on demande la distance du point à la ligne ou au plan.

89. Vous voyez par là que pour *déterminer l'angle qu'une droite inclinée* ab *fait avec le plan horizontal* (P. II, F. 14), il faut appliquer le fil-à-plomb en un point *a* de la droite, marquer le point *c* qu'indique le plomb sur le plan, et joindre *c* au point *b* où la droite rencontre le même plan. L'angle *abc* est celui qui est demandé.

On trouverait d'une manière analogue, l'angle d'une oblique et d'un plan qui ne serait pas horizontal. Au lieu d'abaisser une verticale du point *a*, il faudrait abaisser de ce

même point une perpendiculaire sur le plan, ce qu'on ferait au moyen de deux équerres (86).

90. L'ensemble de tous les points communs à deux plans qui se coupent, forme leur *intersection.*

L'intersection de deux plans est une droite ; car si vous joigniez par une droite deux points qui leur fussent communs, cette droite serait à la fois dans chacun des deux plans (83) ; et s'il y avait un point commun qu'elle ne prît pas, vous pourriez le joindre à deux points de la droite et former ainsi une face, un plan limité par trois lignes, qui se confondrait avec chacun des plans illimités. Or, cela est impossible. Donc, la droite qui joint deux des points communs à deux plans quelconques, prend tous les autres et forme l'intersection de ces plans.

Voilà pourquoi les ouvriers ne s'occupent point de rendre droites, les arêtes qui doivent l'être dans un corps ; il leur suffit de faire exactement planes, les faces qui se coupent selon ces arêtes. C'est aussi pour la même raison, que le pli d'une feuille de papier est toujours une ligne droite, car les deux parties d'une feuille pliée sont deux faces ou plans qui se rencontrent.

91. *Deux plans verticaux qui se coupent, ont une verticale pour intersection,* parce que le fil-à-plomb appliqué à un des points communs, devant être à la fois dans chacun des plans (85), se dirigerait nécessairement selon la droite d'intersection.

Un jalon est donc rigoureusement vertical, lorsqu'il se trouve dans deux plans verticaux qui se coupent.

Placer un jalon ou une tige A verticalement ou perpendiculairement à un plan horizontal (P. II, F. 15).

Mettez-vous en un point quelconque B ; suspendez d'une main le fil-à-plomb devant votre œil droit, et avec l'autre main, faites les signes nécessaires pour que l'aide amène la partie supérieure du jalon, dans le plan vertical qui contient le pied de ce jalon et le fil. Prenez ensuite une autre position C, et faites la même opération. Si l'aide a cette fois le soin de pousser à droite ou à gauche, dans la direction AB, le jalon sera vertical, dès qu'il se trouvera dans le plan qui contient son pied et le fil. Cependant, il convient de vérifier s'il est resté dans le premier plan vertical.

Il est plus court et plus sûr d'opérer à la fois en B et en C ; par conséquent, trois personnes sont néces-

saires pour placer un jalon exactement et promptement dans la verticale de son pied. Néanmoins, un seul homme en vient à bout, s'il y met le temps et la patience nécessaires.

Observez que l'opération a plus d'exactitude, lorsque les directions AB, AC se coupent à-peu-près d'équerre.

92. L'espace illimité que laissent entre eux deux plans qui se rencontrent, est appelé *coin*, parce que les deux plans ont alors, l'un par rapport à l'autre, la position des deux grandes faces du coin dont se sert le fendeur de bois. Le coin est donc pour les plans, ce que l'angle est pour les droites (23). Aussi est-ce au moyen de l'angle formé par des droites, qu'on apprécie un coin.

L'indication d'un coin est la même que celle de l'angle de deux droites tracées sur les plans, perpendiculairement à l'intersection. Cet angle augmente par multiplication ou diminue par division tout comme le coin : il se double, si le coin se double, ou il se réduit au tiers, si le coin s'y réduit. Quand l'angle est droit, il en est de même du coin, et les deux plans se trouvent perpendiculaires entre eux.

Deux plans se rencontrent d'équerre, si l'un renferme une perpendiculaire à l'autre.

En effet, la perpendiculaire l'est sur toutes les droites du second plan (86) ; elle l'est donc sur l'intersection et sur une droite menée par son pied, d'équerre à cette intersection, dans le même second plan. Conséquemment, le coin est droit.

Tout plan vertical est perpendiculaire au plan horizontal qu'il rencontre; car il contient une infinité de verticales qui sont perpendiculaires à tous les plans horizontaux (86). Ainsi, la face intérieure d'un mur de maison et le plancher forment un coin droit ou sont perpendiculaires entre eux.

Vérifier si deux faces planes d'une pierre sont d'équerre.

On se sert pour cela d'une équerre évidée ou formée de deux règles. Lorsque cette équerre embrasse le coin de la pierre, chaque règle, placée perpendiculairement à l'arête de ce coin, doit s'appliquer exactement dans toute sa longueur, sur l'une des deux faces.

Mais, pour opérer avec une grande exactitude, en suivant ce procédé, il faudrait vérifier la position des règles par rapport à l'intersection des faces. Il est donc

plus sûr ou au moins plus simple de placer une des règles contre une des faces et de faire pivoter l'équerre sur cette règle, pour voir si, dans toutes les positions, l'autre règle s'applique exactement sur l'autre face. Lorsqu'il en est ainsi, la première face contient une droite perpendiculaire à la seconde (86), et par conséquent le coin est droit.

Vérifier si les deux faces inclinées d'un faîte de charpente font bien l'angle voulu.

Ces faces sont obliques l'une par rapport à l'autre; leur coin n'est donc pas droit, et il faut se servir d'une fausse équerre à charnière. Vous leverez, avec cet instrument, sur *l'épure* ou *tracé en grand*, l'angle obtus que doivent faire les deux pans du toit (24); puis vous suivrez le premier des deux procédés qui viennent d'être donnés pour la vérification d'un coin droit.

93. *Tout plan qui rencontre un plan horizontal, y marque une droite de niveau;* car l'intersection de deux plans est une droite (90), et toute droite située sur un plan horizontal est horizontale elle même (85).

Parmi les droites qu'on peut tracer sur un plan incliné, il en est de parallèles qui ont une pente plus forte que celle de toutes les autres (80); elles sont appelées, pour cette raison, *lignes de plus grande pente.*

Toute ligne de plus grande pente doit former un angle de pente plus ouvert que celui d'une autre droite quelconque, tracée sur le même plan (88). Par conséquent, *elle fait avec le plan horizontal, un angle égal à celui du plan incliné, et rencontre d'équerre l'intersection de niveau, ainsi que toutes les autres horizontales du second plan.*

Les lignes de plus grande pente ont de l'importance: les eaux et tous les corps qui glissent ou roulent sur un plan incliné, les suivent toujours, attendu qu'elles offrent les chemins les plus rapides et les plus courts à la fois, que puissent prendre ces corps pour descendre le plan.

Tracer une ligne de plus grande pente.

Vous déterminerez une des horizontales du plan incliné (44) et vous n'aurez plus qu'à élever, dans ce plan, une perpendiculaire en un point quelconque de l'horizontale; cette perpendiculaire et ses parallèles seront des lignes de plus grande pente.

94. *Le plan vertical qui contient une ligne de plus*

grande pente, est perpendiculaire au plan incliné, et il est le seul plan vertical qui puisse l'être.

En effet, toute horizontale du plan incliné étant perpendiculaire à la ligne de plus grande pente et à la verticale qui aboutit au croissement de ces deux lignes (44), est d'équerre sur le plan vertical (86). Elle fait donc aussi un angle de 90° avec la perpendiculaire élevée sur la ligne de plus grande pente, dans le plan vertical, et par conséquent, le coin des deux plans est droit (92).

Lors donc qu'il s'agira de *rendre un plan vertical et perpendiculaire à un plan incliné*, ou qu'il faudra *établir sur une ligne de plus grande pente, un plan perpendiculaire à un plan incliné*, il vous suffira de tracer cette ligne et d'employer le fil-à-plomb; vous n'aurez pas besoin d'élever une perpendiculaire sur le plan incliné, comme le veut le n° 92. C'est ainsi qu'on place les demi-fermes d'une charpente d'appentis, car elles doivent être verticales et d'équerre sur le toit. Quant aux fermes complètes, elles satisfont à ces deux conditions, dès qu'elles contiennent une ligne de plus grande pente de chacun des deux pans du comble.

95. Deux plans peuvent être placés, l'un par rapport à l'autre, de manière à ne pas former un coin. Alors, ils ne sauraient se rencontrer, se trouvent partout également écartés, et sont dits *parallèles* (45).

La distance de deux plans parallèles est la longueur d'une perpendiculaire commune, prise d'un plan à l'autre. Cette perpendiculaire est en effet la plus courte droite qu'on puisse mener entre les deux plans; car concevons un plan quelconque qui la contienne; il coupera les autres selon des droites (90), et la perpendiculaire étant d'équerre sur ces droites (86), se trouvera plus courte que toute oblique (41).

Deux plans perpendiculaires à une même droite, sont parallèles.

Concevons un plan quelconque qui contienne la droite; il coupera les autres selon deux droites perpendiculaires à la première (86). Ces deux droites seront conséquemment parallèles (47); elles ne pourront se rencontrer (45), et il en sera de même des plans donnés où elles se trouvent.

Deux plans horizontaux sont parallèles; car ils sont perpendiculaires à une même verticale (86).

Le plancher et le plafond d'une chambre offrent un exemple de plans horizontaux situés l'un au-dessus de l'autre et conséquemment parallèles. La distance de plans ainsi placés se prend sur une verticale.

Des droites parallèles comprises entre plans parallèles, sont égales.

Le principe est évident pour des perpendiculaires aux plans, puisqu'ils sont partout également écartés. D'ailleurs, des obliques parallèles font le même angle avec chacun des plans, et par conséquent, elles sont aussi de même longueur (60).

Couper un corps parallèlement à une de ses faces, de laquelle partent des arêtes parallèles.

Portez la même longueur sur les arêtes parallèles, et abattez toute la partie du corps qui dépasse les points ainsi marqués, en observant de former un plan où se trouvent ces divers points.

EXTRACTION DE RACINE.

96. Ayant étudié les propriétés qui dépendent de la position des faces planes, nous avons à nous occuper de celles que font naître les différentes formes produites par les limites de ces faces; mais pour comprendre ce chapitre et même tout le reste de la Géométrie, vous avez besoin d'étendre vos connaissances en arithmétique: il faut acquérir la notion des *quarrés numériques* et apprendre à faire l'*extraction de racine*.

Vous saurez d'abord que *le quarré d'un nombre est le produit qu'on obtient en multipliant ce nombre par lui-même*. Ainsi, 64 est le quarré de 8, parce que 8 fois 8 font 64. Voici au reste les quarrés des douze premiers nombres; vous devez les apprendre par cœur.

Nombres: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Quarrés: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

Le nombre qui, multiplié par lui-même, en produit ou en produirait un autre, est dit la *racine quarrée* ou simplement la *racine* de cet autre. Par exemple, la racine de 81 est 9, parce que 9 fois 9 font 81, ou parce que 81 est le quarré de 9. Les douze premiers nombres sont donc les racines des quarrés que vous voyez écrits au-dessous.

Mais, tout nombre peut être considéré comme un quar-

ré, ou comme le produit d'un autre nombre multiplié par lui-même, et il faut pouvoir trouver cet autre nombre. L'opération de calcul qu'on fait pour cela, se nomme *extraction de racine quarrée* ou simplement *extraction de racine:* elle est indispensable à la pratique de la Géométrie.

Quelle est la racine de 23425? PREUVE.

2.34.25	153,0522..	0
13	25	
92	303	
1600.00.00.00	30605	
69750	306102	
852960	3061042	
2407516	.....	7

Je partage le nombre 23425 en groupes de deux chiffres chacun, en allant de droite à gauche. Le 1er groupe à gauche peut conséquemment contenir un ou deux chiffres. Je prends la racine quarré 1 du plus grand quarré 1 contenu dans le premier groupe 2, et j'écris cette racine 1 à droite du nombre 23425, comme le diviseur d'une division. De 2, je retranche le plus grand quarré 1 qu'il contient, et j'écris au-dessous le reste 1.

A côté de ce reste, j'abaisse le 1er chiffre 3 du 2e groupe et j'ai 13. Je double le chiffre 1 de la racine et j'obtiens 2 que j'écris au-dessous, à la place ordinaire du quotient d'une division. Je divise 13 par ce nombre 2.

Le quotient 6 peut être trop grand pour la racine. Je l'essaie en le supposant écrit à la suite du diviseur 2 et en multipliant le nombre 26 qui en résulte, par ce même quotient 6. Pour que 6 convienne à la racine, il faut que le produit puisse se retrancher du reste 1 du 1er groupe, suivi de tout le second 34, c'est-à-dire du nombre 134. Tout cet essai, qui consiste en une multiplication et une soustraction dont on n'a pas besoin de connaître le reste, se fait par la pensée, sans rien écrire, comme l'essai d'un quotient, quand le diviseur a plusieurs chiffres.

Je vois ainsi que 6 est trop grand. Je le diminue donc d'une unité et j'essaie 5 de la même manière. Trouvant le chiffre 5 bon pour la racine, je l'y écris à côté du chiffre 1. Je l'écris aussi à côté du diviseur 2, ce qui donne 25. Je multiplie 25 par le 5 de la racine, et je retranche de 134, en écrivant successivement les chiffres du reste, comme si je faisais une division. Je trouve par là que le reste est 9.

A côté du reste 9, j'écris le 1er chiffre 2 du 3e groupe

25, et j'ai 92. Je double le nombre 15 de la racine, et j'obtiens 30 que j'écris vis-à-vis de 92, au-dessous de 15. Je divise 92 par 30 et j'essaie le quotient 3, comme j'ai essayé tout-à-l'heure 6 et 5. Trouvant le chiffre 3 bon pour la racine, je l'y écris à la suite de 15 et je l'écris aussi à la suite du diviseur 30, ce qui donne 303. Multipliant 303 par le chiffre 3 de la racine et retranchant le produit à mesure que je le forme, du reste du 2e groupe, suivi de tout le 3e, c'est-à-dire du nombre 925, j'ai pour reste 16.

L'opération est alors terminée, si l'on ne veut pour racine qu'un nombre entier. Cette racine est 153; le reste 16 montre que le nombre 23425 excède d'autant le quarré de 153. Si au lieu de 23425 nous eussions eu 23409, nous aurions trouvé 153 pour racine, sans aucun reste. Mais, quoique incomplète, la racine 153 ne diffère pas d'une unité de la vraie racine, puisque 4 mis à la place de 3 dans 153, serait trop fort, même pour la division de 92 par 30. D'ailleurs, 154 a pour quarré 23716, nombre bien plus grand que 23425.

Il en est donc des racines comme des quotiens: elles ne sont pas toujours complètes. Dans tous les cas, leur recherche se fait, ainsi que vous venez de le voir, au moyen de la division, de la multiplication et de la soustraction; ceux qui savent bien exécuter ces opérations, n'éprouveront donc aucune difficulté à pratiquer l'extraction de racine.

Il est souvent nécessaire d'avoir une racine moins différente de la véritable, que celle qui est exprimée par un nombre entier. La même opération suffisamment continuée, permet d'approcher aussi près qu'on veut de la racine exacte. Il suffit d'écrire à la suite du dernier reste, autant de groupes de deux zéros, qu'on désire de décimales.

Supposons qu'on veuille obtenir la racine de 23425 à moins de 1 dixmillième près. Je devrai pousser l'extraction jusqu'aux dixmillièmes, ou trouver les quatre premières décimales de la racine, et par conséquent, j'écrirai quatre groupes de deux zéros à la suite du reste 16.

Cela fait, je continuerai de diviser chaque reste joint au 1er chiffre du groupe suivant, par le double du nombre déjà écrit à la racine, jusqu'à l'épuisement de tous les groupes de zéros; mais je séparerai du nombre entier 153, par une virgule, les nouveaux chiffres que je mettrai à la racine. Ainsi, je diviserai 160 par 306, puis j'écrirai

le quotient 0 à la suite de la virgule et à la suite de 306. Si je multipliais 3060 par 0, et que je fisse la soustraction du produit, j'obtiendrais évidemment pour reste 1600. Je passe donc ces deux opérations, et je divise tout de suite 1600 suivi du 1er zéro du 2e groupe, ou 16000, par 3060. Cela me donne 5 à la racine et 6975 pour reste. A côté de ce reste, j'écris le 1er zéro du 3e groupe; je divise 69750 par 30610; j'obtiens 2 à la racine et 85296 pour reste. Enfin, je divise 852960 par 306104; j'obtiens 2 à la racine et pour dernier reste 2407516, ou plutôt 0,02407516.

La racine de 23425 est donc alors 153,0522. Elle se trouve encore moindre que la vraie; mais n'en différant pas d'un dixmillième, elle peut bien être regardée comme exacte.

Si au lieu du nombre entier 23425, on avait le nombre 234,25, la recherche de la racine se ferait absolument de la même manière; seulement, il faudrait former les groupes de deux chiffres à partir de la virgule, et mettre une virgule à la racine, dès qu'on aurait employé tous les chiffres de la partie entière 234. La racine serait alors 15,30522.

La preuve par 9 de la multiplication, fournit un moyen facile et expéditif de vérifier une extraction de racine. Additionnez les chiffres de la racine et ôtez 9 à mesure que vous le pourrez; formez le quarré du reste; additionnez les chiffres de ce quarré, en ôtant tous les 9; ajoutez le nouveau reste aux chiffres du reste de l'extraction, en ôtant les 9; vous obtiendrez un troisième reste qui, si l'opération a été bien faite, sera égal à celui que donnera le nombre proposé, quand vous en aurez additionné les chiffres et ôté les 9.

Ici, le reste de la racine est o; le quarré de o est o; le reste de l'extraction donne 7, et le nombre 23425 donne 7 aussi. Par conséquent, l'opération est très-probablement bonne.

Il faut observer toutefois que la preuve par 9 ne fait point apercevoir l'erreur qui provient d'un trop petit quotient; cette preuve réussit, lors même qu'un ou plusieurs chiffres de la racine sont trop faibles. Il faut donc faire en sorte qu'ils ne le soient pas. Or, rien n'est plus facile: il suffit de prendre les divers quotiens aussi grands qu'ils peuvent l'être, comme pour la division ordinaire. Dans cette opération, on est averti de l'insuffisance des quotiens, par les restes qui surpassent alors le diviseur, tandis qu'ils devraient être moindres. Dans l'extraction

de racine, il n'en est pas ainsi ; mais on est certain que le quotient ou *le chiffre mis à la racine n'est pas trop petit, quand le reste est moindre que le double de la partie de racine déjà trouvée, augmenté d'une unité.*

Par exemple, dans la racine 153,05 obtenue après la 4e division, le dernier chiffre 5 est suffisamment grand, parce que le reste 6975 est moindre que le double de 15305 augmenté de 1 ou moindre que 30611. Si je mettais 4 au lieu du dernier 5, j'aurais 37584 pour reste, 15304 pour racine, et comme 37584 est plus grand que 1+2 fois 15304 ou 30609, j'en conclurais que la racine 15304 est trop petite d'une unité au moins.

POLYGONES.

97. On donne le nom de *polygones* aux faces planes dont les limites sont des lignes droites. Elles présentent des angles, des sommets et des côtés, en même nombre. Les angles se trouvent tous ouverts en dedans (P. II, F. 16) ou bien les uns ont cette position, tandis que les autres sont ouverts en dehors (F. 17). Dans le premier cas, le polygone est dit à *angles saillans*, et dans le second, à *angles rentrans*. C'est de la première espèce qu'il va être question, attendu qu'un polygone de la deuxième peut toujours être décomposé en plusieurs polygones à angles saillans : il suffit, pour cela, de tirer des droites telles que AB, BC, appelées *diagonales ;* elles donnent les figures ABD, BEFC, ABCG qui ne renferment aucun angle rentrant.

Vous voyez que *les diagonales d'un polygone sont des droites qui joignent deux sommets séparés par un autre ou plusieurs.*

Tout angle ABC (F.16) formé par un côté AB de polygone et le prolongement BC d'un des deux côtés qui rencontrent celui-là, est appelé *angle extérieur*. L'angle ABD de deux côtés du polygone est dit *intérieur*.

Un polygone qui a tous ses angles égaux et tous ses côtés de même longueur, est *régulier*.

Deux polygones dont l'un est la copie réduite de l'autre (68), sont dits *semblables :* les angles du premier sont égaux aux angles du second ; les angles égaux sont placés dans le même ordre, sur les deux figures ; il en est de même des côtés *correspondans*, c'est-à-dire des côtés qui joignent les sommets des angles de même indication ; enfin, deux côtés correspondans se soutiennent le même

nombre de fois que deux autres côtés correspondans quelconques.

TRIANGLES.

98. Le plus simple de tous les polygones est celui qui a trois côtés et trois angles ; on l'appelle *triangle.*

La somme des trois angles d'un triangle égale celle de deux angles droits ; car si vous prolongez le côté AB (P. II, F. 18), et que vous meniez par le sommet B, une droite BD parallèle à AC, vous aurez l'angle DBE = A son correspondant (47), l'angle CBD = C comme alternes-internes, et vous savez que les trois angles ABC, CBD, DBE, faits en un point B, du même côté de la droite AE, valent deux angles droits (31).

Remarquez que, dans un triangle, chaque angle extérieur CBE, est la somme des deux angles intérieurs A, C, qui ont des sommets différens du sien (97).

99. *Construire un triangle avec trois droites A, B, C, dont une quelconque est moindre que la somme des deux autres* (P. II, F. 19).

Ce tracé est absolument le même que celui du n° 6. Tirez une droite et portez-y la longueur A, de D en E ; puis du point D, avec B pour rayon, décrivez un petit arc ; et du point E, avec C, décrivez un second arc qui coupe le premier en F ; joignez enfin F à D et à E, vous aurez le triangle DEF dont les trois côtés auront les longueurs données.

Il faut, pour qu'il y ait possibilité dans le tracé, que chaque droite soit moindre que la somme des deux autres, parce que, dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres qui forment une ligne brisée.

Delà le moyen de *lever un angle sans fausse équerre* (24). Supposez qu'il s'agisse de l'angle formé par les traces de deux murs sur un plancher. Vous mesurerez une longueur AB sur l'une de ces traces (P. II, F. 20), une longueur AC sur l'autre, et la distance des points B, C ; puis, avec ces trois longueurs, vous construirez, par exemple, sur l'une des faces d'une pierre, un triangle dont l'angle opposé à la longueur BC, sera précisément égal à l'angle A.

100. *Construire un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment.*

Il n'est pas nécessaire de connaître les trois côtés d'un triangle, pour le tracer. Si vous avez l'angle A, par

exemple (P. II, F. 21), et les longueurs B, C des côtés qui le forment, vous faites un angle D égal à l'angle A (27); vous portez sur les côtés de l'angle D, les longueurs B, C, de D en E et en F; puis vous tirez la droite EF qui achève le triangle DEF.

101. *Construire un triangle dont on a deux angles A, B et le côté C qui joint les sommets de ces angles* (P. II, F. 22).

Tracez une droite et portez-y la longueur C, de D en E; faites sur DE, au point D, un angle égal à A (27), et au point E, un angle égal à B. Les autres côtés de ces angles achèveront le triangle DEF en se coupant au point F.

102. Le triangle qui a deux côtés égaux, est dit *symétrique*. Les fermes d'un toit à deux pans, les faces de toit qui remplacent des pignons, sont des exemples de triangles symétriques.

Dans un triangle symétrique ABC (P. II, F. 23), *il y a égalité entre les angles A, C opposés aux côtés égaux* BC, BA; car la perpendiculaire BD donne DA=DC (60).

Lorsque vous leverez un angle par le procédé du n° 99, il sera bon de faire symétrique le triangle BAC (F. 20), en prenant AB égale à AC, s'il y a possibilité; vous n'aurez alors qu'une seule longueur à mesurer et à noter, car ayant mesuré AC, vous pourrez rapporter cette droite sur AB.

103. Le côté AC qui, dans un triangle symétrique (P. II, F. 23), n'est pas égal aux deux autres, se nomme *la base* du triangle. La perpendiculaire BD abaissée sur cette base, du sommet B opposé, est *la hauteur*. Mais en général, on appelle *hauteur* d'un triangle quelconque, la perpendiculaire abaissée d'un des sommets, sur le côté opposé, prolongé s'il le faut, et ce côté est alors regardé comme la *base* du triangle.

Construire un triangle symétrique dont on connaît la base B et la hauteur H (P. II, F. 24).

Tirez une droite sur laquelle vous porterez la base B, de A en C; élevez une perpendiculaire au milieu de AC (43); portez la hauteur H sur cette perpendiculaire, de D en E; puis joignez E aux points A, C; vous aurez le triangle symétrique AEC.

Construire un triangle symétrique, quand on connaît la hauteur H et la longueur L des côtés égaux (P. II, F. 25).

Elevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque AB ; portez la hauteur H de C en D ; décrivez de D, avec la longueur L, un arc qui coupe AB en deux points E, F ; joignez enfin D à E et à F ; vous aurez le triangle symétrique EDF.

Construire un triangle symétrique, quand on connaît la base et la longueur des côtés égaux.

Vous connaissez réellement les trois côtés et vous pouvez employer le procédé du n° 99.

Construire un triangle symétrique, quand on connaît la longueur L des côtés égaux et leur pente (P. II, F. 26).

Elevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque AB. Si la pente est, par exemple, de 5 décimètres, vous porterez 5 décimètres de C en D, 1 mètre de C en E (80), et la longueur L sur la droite ED, à partir de E. Vous marquerez ainsi un point F. Décrivez de ce point, avec FE, un arc qui coupe AB une seconde fois en G, puis joignez F à G ; vous aurez le triangle symétrique EFG.

104. Le triangle ABC qui a ses trois côtés égaux (P. II, F. 27), est dit *équilatéral* (*). *Ses trois angles sont aussi égaux,* car des angles opposés à des côtés de même longueur, dans un triangle, peuvent toujours se couvrir exactement (101). Il s'ensuit que chaque angle d'un triangle équilatéral est de 60°, puisque leur somme est de 180° (98).

Le triangle équilatéral est un polygone régulier, car il satisfait aux conditions de régularité énoncées dans le n° 97.

Construire un triangle équilatéral dont on connaît le côté.

Connaissant un côté, vous connaissez les trois ; vous pouvez donc employer le procédé du n° 99.

105. Le triangle ABC (P. II, F. 28) dans lequel se trouve un angle droit B, est appelé *triangle rectangle.* Les équerres bien faites en sont des exemples. On nomme *hypothénuse* le côté AC opposé à l'angle droit.

Puisque la somme des trois angles d'un triangle donne 180° et que l'angle B est de 90°, *les deux angles aigus A, C d'un triangle rectangle valent ensemble* 90°. Lors donc qu'un tel triangle est symétrique, comme ABC, chacun des angles aigus A, C qui sont égaux, est de 45°.

Construire un triangle rectangle, quand on connaît les deux côtés A, B de l'angle droit, (P. II, F. 29).

Elevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque CD (43) ; portez l'un des côtés donnés, A par

* Prononcez *écuilatéral.*

exemple, de E en F, et l'autre B, de E en G; joignant F à G par une droite, vous aurez le triangle rectangle FEG.

Construire un triangle rectangle, quand on connaît l'hypothénuse A et un côté B de l'angle droit (P. II, F. 30).

Élevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque CD; portez la longueur B sur l'une ou sur l'autre de ces lignes, à partir de leur intersection E; décrivez du point F ainsi obtenu, un arc qui ait pour rayon la longueur A de l'hypothénuse et qui coupe EC ou ED; joignez à F le point G donné par cet arc, et vous aurez le triangle rectangle FEG.

Comparaison des Triangles.

106. Dans plusieurs cas, on peut prononcer que deux triangles sont égaux ou que l'un couvrirait l'autre exactement, sans avoir besoin d'en mesurer les angles et les côtés.

Deux triangles quelconques, ABC, A'B'C' *sont égaux* (P. II, F. 32).

1° *Quand les côtés de l'un égalent les côtés de l'autre,* c'est-à-dire, lorsque AB=A'B', BC=B'C', CA=C'A';

2° *Quand un angle de l'un égale un angle de l'autre, et que les côtés du premier angle ont mêmes longueurs que ceux du second;* lorsque, par exemple, l'angle A=A', AB=A'B', AC=A'C';

3° *Quand un côté de l'un a même longueur qu'un côté de l'autre, et que les angles formés par le premier côté, égalent ceux qui sont formés par le second;* lorsque, par exemple, BC=B'C', B=B', C=C'.

Il est facile de reconnaître en effet que, dans tous ces cas, le triangle A'B'C' couvrirait exactement ABC, si trois des côtés et des angles qui forment le premier, étaient appliqués sur les trois parties qui leur sont égales dans le second. Observez toutefois qu'au nombre des trois parties doit se trouver un côté; il ne suffit pas que les trois angles d'un triangle soient égaux à ceux d'un autre, pour que ces deux faces puissent se couvrir exactement.

Vous verrez tout aussi facilement que *deux triangles rectangles se recouvrent ou sont égaux, lorsque l'hypothénuse et un petit côté de l'un égalent l'hypothénuse et un petit côté de l'autre.*

En combinant ces principes et les tracés des triangles (99, 100, 101, 105), on parvient aisément à faire de

plusieurs manières, un triangle qui soit égal à un triangle donné.

107. Deux triangles peuvent avoir la même superficie, sans pouvoir se couvrir, ou sans être égaux. On dit alors qu'ils sont *équivalens*.

Deux triangles quelconques sont équivalens, quand la base et la hauteur de l'un égalent la base et la hauteur de l'autre. Ainsi, deux triangles ABC, ADC (P. II, F. 33) qui ont même base AC, sans avoir les mêmes angles, et dont les sommets B, D se trouvent sur une parallèle à cette base, sont équivalens; car ils ont des hauteurs égales, puisque ces hauteurs sont les perpendiculaires BE, DF comprises entre les parallèles AC, BD (45).

En effet, chaque triangle peut être considéré comme composé de bandes infiniment étroites et disposées parallèlement à la base. Il y a le même nombre de bandes dans les deux figures, attendu que les hauteurs sont égales. De plus, toute bande *ac* de l'un égale la bande correspondante *a'c'* de l'autre; car *ac*, *a'c'* sont contenues dans AC, comme B*e*, D*f* dans la hauteur commune BE ou DF (67), et puisque B*e*=D*f*, on a aussi *ac*=*a'c'*. Les deux superficies se composent donc d'un même nombre d'élémens égaux; elles ont par conséquent, la même étendue ou sont équivalentes.

Construire un triangle qui soit équivalent à un triangle donné ABC.

Il suffit de mener par un sommet B, une droite BD parallèle au côté opposé AC, et de joindre un point quelconque D de cette parallèle, aux extrémités de AC.

Partager un champ triangulaire ABC en un certain nombre de triangles équivalens, 3 par exemple (P. II, F. 34).

Divisez AC, un quelconque des côtés, en autant de parties égales qu'on demande de portions (65); puis, joignez les points de division D, E, au sommet opposé B. Les triangles ABD, DBE, EBC seront équivalens, puisqu'ils auront des bases égales AD, DE, EC et même hauteur BF.

108. *Les superficies de deux triangles de même hauteur se contiennent comme leurs bases.*

Si, par exemple, la base CE du triangle CBE (P. II, F. 34), est contenue 3 fois dans la base AC du triangle ABC, la superficie du premier se trouvera contenue aussi

3 fois dans celle du second ; car portant CE autant de fois qu'on le pourra sur AC, et joignant les points de division au sommet B, on formera dans ABC, trois triangles équivalens à CBE (107).

109. *Deux triangles qui renferment un même angle, se contiennent comme les produits des côtés de cet angle.*

Soient les deux triangles ABC, *abc* (P. II, F. 35), tels que l'angle B=*b*. Le premier contient le second comme AB×BC contient *ab*×*bc*. Plaçons *abc* sur ABC, de façon que l'angle *b* couvre son égal B ; le petit triangle prendra la position *a'*B*c'* ; B*a'* égalera *ba* ; B*c'* égalera *bc*, et si nous menons *a'*C, les deux triangles de même hauteur ABC, BC*a'* donneront la proportion (108)

$$ABC : BCa' :: AB : Ba'.$$

Mais les deux triangles BC*a'*, B*c'a'* ont aussi même hauteur, et conséquemment

$$BCa' : Bc'a' :: BC : Bc'.$$

Multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous obtiendrons

$$ABC\times BCa' : BCa'\times Bc'a' :: AB\times BC : Ba'\times Bc'.$$

Divisant les deux termes du premier rapport par BC*a'*, on a enfin

$$ABC : Bc'a' :: AB\times BC : Ba'\times Bc'.$$
$$\text{ou } ABC : abc :: AB\times BC : ab\times bc.$$

110. Toutes les relations de *similitude* ou ressemblance (97) ont lieu à la fois pour deux triangles ABC, *abc* (P. II, F. 35), et *ces triangles sont par conséquent semblables*, 1° *lorsque deux angles quelconques A, B du grand sont égaux à deux angles* a, b *du petit*. D'abord, le troisième angle C=*c*, puisque chacun est l'excès de 180° sur A+B ou sur *a*+*b*. Ensuite, si l'on place le petit triangle sur le grand, de manière que l'angle *b* couvre B, *ac* prendra la position de *a'c'* parallèle à AC, attendu que les angles correspondans *a'* et A sont égaux (47). Conséquemment, *ba* devenu B*a'* est contenu dans BA, comme *bc* devenu B*c'* l'est dans BC, comme *ac* devenu *a'c'* l'est dans AC (67).

2°. *Deux triangles sont semblables, lorsque deux côtés quelconques de même rang se contiennent comme deux autres côtés de même rang*, c'est-à-dire quand AB contient *ab*, comme AC contient *ac*, comme BC contient *bc*. Portons *ba* de B en *a'* et *bc* de B en *c'*; alors B*a'* sera con-

tenu dans BA, comme Bc' dans BC, et $a'c'$ se trouvera parallèle à AC. Or il s'ensuivra que AC contiendra $a'c'$, comme AB contient Ba' ou ba. Ainsi $a'c'$ égalera ac, et le triangle B$a'c'$ égalera abc (106). Mais les angles de B$a'c'$ égalent ceux de ABC (47); donc il en est de même des angles de abc, et toutes les conditions de similitude sont remplies.

3° *Deux triangles sont semblables, lorsqu'un angle du grand égale un angle du petit, et que les côtés du premier angle contiennent leurs correspondans du second le même nombre de fois;* quand, par exemple, l'angle B=b et que AB contient ab, comme BC contient bc. Plaçons l'angle b sur l'angle B, de manière qu'il le couvre; a tombera en un point a', c en un point c', et le triangle Ba c' sera égal à bac (106). Mais, parce que AB contiendra Ba' comme BC contient Bc', $a'c'$ se trouvera parallèle à AC (67). Donc AC contient $a'c'$ ou ac, comme AB contient ab; l'angle a' ou a égale A (47); l'angle c' ou c égale C, et toutes les conditions de similitude sont remplies.

4° *Deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont parallèles aux trois côtés de l'autre;* car alors les angles du grand sont égaux à ceux du petit (47), et l'on retombe dans le premier cas.

5° *Deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont perpendiculaires aux trois côtés de l'autre:* il en résulte aussi l'égalité des angles, car si l'on fait tourner l'une des figures, de manière que chacun des côtés exécute un quart de conversion, ces côtés deviennent tous en même tems parallèles à ceux de l'autre triangle.

111. *Deux triangles semblables se contiennent comme les quarrés numériques de deux côtés correspondans.*

Pour les deux triangles semblables ABC, abc (P. II, F. 35), on a (96) $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB\times AB}{ab\times ab}$. En effet, l'égalité des angles B, b donne (109) $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB\times BC}{ab\times bc}$. Mais il suit de la similitude que $\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab}$. On peut donc mettre le second de ces rapports à la place du premier. Par conséquent, $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB\times AB}{ab\times ab}$.

Ainsi, on n'a pas besoin de mesurer les superficies de deux triangles semblables, pour connaître combien de fois le grand contient le petit: il suffit de mesurer deux côtés correspondans AB, ab, de faire le quarré de chacune de ces longueurs et de diviser le grand quarré par le petit (97).

Si, par exemple, AB=15^m et que ab=5^m, le quarré de AB sera 225; celui de ab sera 25. Divisant 225 par 25, vous trouverez 9 pour quotient, et vous en conclurez que le triangle ABC contient 9 fois le triangle abc.

Partager un champ triangulaire ABC en 4 portions égales (P. II, F. 36).

Divisez chaque côté en deux parties égales (43); joignez les milieux, par des droites DE, EF, FD; vous formerez quatre triangles, et chacun de ces petits triangles sera le quart du grand.

En effet, DF est parallèle à BC (65); par suite, l'angle ADF égale son correspondant B (47), et comme l'angle A est commun aux triangles ABC, ADF, ces deux figures sont semblables. Or, AB contient 2 fois AD; si donc vous prenez AD pour unité de longueur, AD=1 et AB=2. Par conséquent, le quarré de AB est 4, celui de AD est 1, et ABC contient 4 fois ADF. Vous verrez de même que CEF est le 2e quart de ABC, que BDE en est le 3e quart, et vous conclurez que DEF en est le 4e; ou bien vous reconnaîtrez facilement qu'en vertu des parallèles (66), les 4 petits triangles ayant leurs côtés correspondans égaux, sont égaux (106); d'où il résulte aussi que chacun est le quart de ABC.

Partager un champ triangulaire ABC en 9 portions égales (P. II, F. 37).

Prenez la racine de 9, comme vous avez pris tout-à-l'heure celle de 4, pour savoir en combien de parties égales vous devez diviser les côtés. Cette racine est 3; partagez donc AB, BC, AC chacun en 3 parties égales (65), et joignez les points de division de deux côtés, par des parallèles au troisième; vous formerez ainsi 9 triangles égaux.

Ces deux exemples suffisent pour montrer comment on partage un triangle quelconque en autant de portions égales, que l'exprime le quarré d'un nombre entier.

Réduire un triangle.

C'est souvent la réduction de la superficie qu'on indique, plutôt que celle des côtés, et d'ordinaire cette réduction de la superficie est exprimée par une fraction qui a l'unité pour numérateur et le quarré d'un nombre entier pour dénominateur. Il s'agit, par exemple, de réduire le triangle au $\frac{1}{4}$, au $\frac{1}{9}$, au $\frac{1}{16}$, etc. Dans un tel cas, vous extrairez la racine du dénominateur, vous la donnerez pour dénominateur à l'unité, et la nouvelle fraction indiquera la réduction convenable des côtés. Ainsi, on

effectuerait la réduction de la superficie au $\frac{1}{16}$, en opérant celle des côtés au $\frac{1}{4}$, puisque 4 est la racine de 16.

Quant à la réduction des côtés, elle se fait par le procédé décrit dans le n° 68, et l'on construit le triangle demandé, en employant les longueurs réduites, comme le prescrit le n° 99.

Copier un triangle en grand.

Veut-on, par exemple, que la superficie de la copie soit quadruple de celle du modèle? vous extrairez la racine de 4, et cette racine 2 vous apprendra que les côtés doivent être doublés. Il ne s'agira plus que de recourir au n° 99, pour construire le triangle demandé, avec des droites doubles de celle du triangle donné.

112. *Tout triangle rectangle ABC est partagé en deux triangles qui lui sont semblables, par la perpendiculaire BD abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse* (P. II, F. 28).

En effet, l'angle A appartient au grand triangle ABC et au petit ADB; l'angle C appartient au grand et au moyen BDC. D'ailleurs, ADB et BDC ont chacun un angle droit, comme ABC (110).

Les deux petits triangles étant semblables au grand, sont évidemment semblables l'un à l'autre.

Le quarré numérique de l'hypothénuse égale la somme des quarrés numériques des deux autres côtés d'un triangle rectangle.

Si, par exemple, le côté BC=4^m et que AB=3^m, le quarré de l'hypothénuse AC sera 25, somme des quarrés 16 et 9 des nombres 4 et 3.

En effet, les trois triangles rectangles ABC, BDC, ADB étant semblables, se contiennent comme les quarrés de leurs hypothénuses (111). Or, le grand triangle est la somme des deux petits. Donc, le quarré de son hypothénuse doit valoir la somme des quarrés des hypothénuses des deux autres triangles, c'est-à-dire des côtés BC, AB de l'angle droit B.

Voilà pourquoi il est prescrit de donner aux cordons du cordeau-équerre (22), des longueurs qui soient entre elles comme 3, 4 et 5. Le quarré 25 du dernier nombre valant la somme des quarrés 9 et 16 des deux premiers, il s'ensuit que le cordeau tendu forme un triangle rectangle dont l'hypothénuse est le plus grand des trois cordons.

Mesurer la longueur de la rampe droite d'un escalier qui doit commencer en A et finir en B (P. II, F. 31).

Cette rampe n'étant pas construite, il n'y a pas lieu d'y appliquer la mesure. On ne peut pas non plus employer une corde tendue de A en B, car le poids d'une corde, si faible qu'il soit, l'empêche de former une ligne droite, toutes les fois qu'elle n'a pas une position verticale. Enfin, le procédé du n° 82 ne donnerait peut-être pas une exactitude suffisante. Vous pourriez, à la vérité, vous servir d'une règle qui serait assez épaisse pour ne pas fléchir sous son propre poids; mais on n'en a pas toujours sous la main, qui soit telle et assez longue. Il est donc bon de savoir calculer la longueur d'une ligne inclinée AB, au moyen de la longueur horizontale AC et de la hauteur verticale BC, qu'il est toujours facile de mesurer.

La verticale du point B et l'horizontale AC qu'elle rencontre, sont d'équerre et forment conséquemment avec AB un triangle rectangle. Faites donc le quarré de la longueur AC et le quarré de la longueur BC; additionnez ces deux quarrés, pour avoir celui de l'hypothénuse AB; puis extrayez la racine de la somme; cette racine sera la longueur de AB. La formule de ce mode de mesurage est $H=\sqrt{C\times C+C'\times C'}$, dans laquelle C et C' représentent les côtés de l'angle droit. Le signe $\sqrt{}$ indique qu'il faut extraire la racine quarrée de la quantité placée dessous.

Si, par exemple, $AC=12^m$, et que $BC=9^m,5$, la formule donne $H=\sqrt{12^m\times12^m+9^m,5\times9^m,5}=\sqrt{144^{mm}+90^{mm},25}=\sqrt{234^{mm},25}=15^m,305\,22$, pour la longueur de l'hypothénuse ou de la rampe AB (96). Aucun autre mesurage ne la ferait connaître avec un pareil degré d'exactitude.

C'est ainsi qu'on peut trouver la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle, toutes les fois que les longueurs des deux côtés de l'angle droit sont connues. Il serait plus exact d'achever par ce moyen le mesurage d'une rampe qui ne pourrait être parcourue, que d'employer le procédé prescrit dans le n° 82.

On veut faire, avec des planches de 6 mètres, un auvent qui abrite une largeur de 5^m; quelle est la pente à donner?

Si vous supposez que l'horizontale AC ait 5^m (P.II,F.31) et que la ligne inclinée AB ait 6^m, la verticale BC sera la pente totale du toit à construire, et il s'agira de calculer la longueur de cette verticale. Or, le triangle ACB est rec-

tangle, et par conséquent, le quarré de l'hypothénuse AB égale le quarré de AC, plus le quarré de BC. Donc, ce dernier quarré est la différence des deux autres. Retranchez donc de 36^{mm}, quarré de AB, le quarré 25^{mm} de AC, vous aurez pour reste 11^{mm} qui sera le quarré de BC. Extrayant la racine de 11^{mm} jusqu'aux millièmes, vous trouverez $3^{m},316$ pour la pente totale BC. La pente pour 1^{m}, serait le cinquième de $3^{m},316$, puisque $AC=5^{m}$. Si donc les poteaux qui soutiendront le bout A des planches doivent avoir 2^{m}, le bout B devra être placé à $5^{m},316$ du sol.

Voilà qui vous montre comment il faut calculer la longueur de l'un des petits côtés de tout triangle rectangle, quand on connaît celle de l'autre et celle de l'hypoténuse. La formule de ce mesurage est $C=\sqrt{(H\times H-C'\times C')}$.

On se propose de bâtir une maison dans l'angle B de deux chemins d'équerre (P. II, F. 28); *la façade qui regardera le sommet B, aura* 15 *mètres de longueur et devra faire le même angle avec les deux directions BA, BC. A quelles distances de B faut-il marquer les extrémités de cette façade, pour qu'elles soient sur les bords des deux chemins?*

La façade AC formera avec les directions BA, BC, un triangle symétrique, puisque les deux angles A, C doivent être égaux (102). Les longueurs BA, BC seront donc égales, et comme le triangle ABC est rectangle, le quarré de AC vaudra le double de celui de BA, par exemple, ou bien le quarré de BA sera la moitié du quarré de 15^{m}. Or, le quarré de 15^{m} est 225^{mm}. Prenant la moitié, vous aurez $112^{mm},5$; extrayant la racine jusqu'aux millièmes, vous trouverez $10^{m},606$ pour la distance BA et pour la distance BC. La droite qui joindra les points A, C ainsi déterminés, aura 15^{m} à 1 millimètre près.

Ce calcul est un exemple de celui qu'il faut faire, toutes les fois qu'il s'agit de trouver les petits côtés d'un triangle symétrique et rectangle dont on connaît l'hypothénuse. La formule de ce mesurage est $C=\sqrt{\frac{H\times H}{2}}$.

QUADRILATÈRES.

Toute face qui est limitée par quatre lignes droites, se nomme *quadrilatère* (*). Il n'y a rien de particulier à dire sur les quadrilatères dont les côtés opposés se coupent

(*) Prononcez *conadrilatère*.

quand on les prolonge ; mais souvent ces côtés opposés sont parallèles, et les formes qui en résultent méritent l'attention, à cause de leur emploi dans les arts.

Trapèze.

113. Un quadrilatère ABCD (P. II, F. 39) qui a deux côtés parallèles AB, CD, est appelé *trapèze* ; le plus grand CD de ces côtés en est la *grande base*, et le plus petit AB, la *petite base*. Lorsque les côtés concourans AD, BC, sont égaux, le trapèze est dit *symétrique*. Cette dernière forme se rencontre dans les toits appelés *mansardes*, dans la *clef* d'une plate-bande en pierres taillées, dans les assemblages en *queue d'aronde*, etc.

Tracer un trapèze symétrique dont on connaît la grande base B, la hauteur H et la longueur L des côtés concourans (P. II, F. 39).

Tirez une droite et portez-y la base B de C en D ; élevez une perpendiculaire au milieu de CD, ou en tout autre point (43) ; prenez EF=H ; menez par F une parallèle à CD ; puis décrivez des points C, D, avec L pour rayon, deux arcs qui coupent cette parallèle chacun en deux points, et joignez aux extrémités de la base CD, les intersections A, B, les plus voisines de F ; vous aurez le trapèze symétrique ABCD.

Si au lieu de la longueur des côtés concourans, on connaissait la petite base, il faudrait en chercher la moitié (62), puis porter cette moitié sur AD, à droite et à gauche de F.

Si au lieu de la grande base, c'était la petite qui fût donnée, avec la longueur L et la hauteur H, vous devriez joindre aux points C, D, les intersections G, H les plus éloignées de F. Le résultat serait alors le trapèze CDHG.

Ces divers cas vous montrent qu'il faut trois choses pour *déterminer* un trapèze symétrique, c'est-à-dire, pour construire une face de cette forme, dans laquelle il n'entre rien d'arbitraire.

Parallèlogramme.

114. Un quadrilatère ABCD (P. II, F. 40) dont les côtés opposés sont parallèles, est nommé *parallélogramme*. La hauteur de cette figure est la distance de deux côtés opposés ; la base est alors l'un de ces côtés..

Les côtés parallèles d'un parallélogramme ont même longueur : AB=CD, AD=BC (66).

Les diagonales AC, BD sont inégales, car elles appartiennent à deux triangles ABC, BCD, tels que les deux autres côtés de l'un égalent les deux autres côtés de l'autre, et la première AC est opposée à un angle aigu B, tandis que la seconde BD est opposée à un angle obtus C.

Enfin, *les diagonales d'un parallélogramme se coupent par le milieu.* Effectivement, AD=BC, les angles DAE et BCE, ADE et CBE sont égaux comme alternes-internes, et par conséquent, le triangle AED = le triangle BCE ; d'où il suit que AE opposé à l'angle D, et CE côté correspondant, sont de même longueur, qu'il en est de même de DE, BE, et que l'intersection E des deux diagonales se trouve au milieu de chacune.

Tracer un parallélogramme dont la hauteur H et les côtés B,B' sont donnés (P. II, F. 40).

Tirez une droite et portez-y le côté B, de D en C ; élevez une perpendiculaire en un point quelconque de CD (38) ; portez H de F en G ; menez par le point G, une parallèle à CD ; puis décrivez des points C, D, avec B' pour rayon, deux arcs qui coupent la parallèle en deux points chacun, et joignez à C, D, les intersections A, B situées à droite des centres ou les intersections H, I situées à gauche. Vous aurez le parallélogramme ABCD ou le parallélogramme CDIH qui remplira les conditions.

Tracer un parallélogramme dont on connaît un angle A et les deux côtés B, C qui forment cet angle (P. II, F. 41).

Faites un angle E égal à l'angle donné A (27) ; portez la longueur B, sur l'un des côtés de cet angle, de E en F, et la longueur C sur l'autre côté, de E en G ; décrivez un arc, de F, avec C pour rayon, et de G, avec B, un second arc qui coupe le premier en H ; joignez enfin ce point H à F et à G. La figure EFHG sera un parallélogramme, et de plus elle sera le seul qu'on puisse faire avec les données du problème.

Vous voyez, par ces deux exemples, que la détermination d'un parallélogramme exige trois choses.

Losange.

115. Un parallélogramme ABCD (P. II, F. 42) dont les quatre côtés sont égaux et obliques les uns sur les autres, s'appelle *losange*.

Les diagonales inégales d'un losange se coupent par le milieu et d'équerre. Elles se coupent par le milieu, comme diagonales d'un parallélogramme (114), et conséquemment AE=EC. Les deux triangles AEB, CEB sont donc égaux (106). Par suite, l'angle AEB=BEC, et ces deux angles sont droits (30).

Tracer un losange dont on connaît le côté L et une diagonale M.

Tirez une droite et portez-y la diagonale M, de A en C; puis, des points A, C, avec L pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en deux points B, D, et tirez les quatre rayons déterminés par ces intersections. Vous aurez le losange ABCD qui satisfera aux conditions. Ainsi, deux choses suffisent pour particulariser un losange : ces deux choses pourraient être encore les diagonales ou un angle et un côté.

Rectangle.

116. Un parallélogramme ACDE (P. II, F. 43) dont les angles sont droits et les côtés voisins inégaux, se nomme *rectangle;* de deux côtés d'équerre CD, CA, l'un est la base et l'autre la hauteur du rectangle; les diagonales sont égales et se coupent obliquement par le milieu.

L'égalité des diagonales AD, CE résulte de celle des triangles rectangles ACD, CDE; ces triangles sont égaux, parce que AC=DE et que le côté CD leur est commun (106).

L'obliquité des mêmes diagonales l'une sur l'autre, provient de l'inégalité des côtés d'équerre AC, CD; car si AC est moindre que CD, par exemple, les angles ADC, ECD ont une indication commune au-dessous de 45° (105), et conséquemment l'angle CFD surpasse 90° (98).

Tracer un rectangle dont on connaît la base B et la hauteur H.

Tirez une droite et portez-y la base B, de C en D; élevez au point C ou au point D, une perpendiculaire (38), et prenez DE=H; menez par E une parallèle à CD et par C une parallèle à DE, ou bien décrivez un arc, de E, avec B pour rayon, et de C, avec H, un autre arc qui coupe le premier. L'intersection A des parallèles ou des arcs achèvera le rectangle ACDE.

Deux choses suffisent donc pour déterminer un rectangle : on pourrait donner aussi une diagonale avec la

base ou la hauteur, et dans ce cas, vous trouveriez la hauteur ou la base par le second procédé du nº 105.

Carré.

117. Un parallélogramme dont les angles sont droits et les quatre côtés égaux, se nomme *carré:* ce polygone est le quadrilatère régulier. La figure ABCD (P. II, F. 44) présente un carré; sa base CD et sa hauteur AD ont même longueur; *les diagonales sont égales et se coupent d'équerre par le milieu.*

Les diagonales sont égales, parce que le carré est un cas particulier du rectangle (116), et elles se coupent d'équerre, parce que le carré est un cas particulier du losange (115).

Tracer un carré dont le côté L est connu.

Opérez comme pour faire un rectangle dont la base et la hauteur seraient égales à L (116); ou bien, tracez deux droites AC, BD, qui se coupent à angles droits (43); décrivez de leur intersection E, avec un rayon quelconque, un arc qui les rencontre aux points F, G; portez L sur la droite FG, de F en H; menez par H une parallèle à BD, jusqu'à AC; menez par A une parallèle à FH, jusqu'à BD. Vous aurez AB=FH=L (66), et il vous restera à porter EA, de E en C et en D. La figure ABCD, ainsi tracée, sera un carré, car EA=EB, comme EG=EF (67).

Tracer un cercle autour d'un obstacle qui empêche de marquer le centre ou de faire circuler un cordeau.

Construisez autour de l'obstacle, un carré ABCD dont le côté égale le diamètre du cercle à tracer (P. II, F. 45); divisez chaque côté en douze parties égales (65); numérotez celles de AB, CD, en allant des extrémités au milieu, et celles de AD, BC, en allant du milieu aux extrémités; joignez ensuite chaque point de division d'un demi-côté, à celui qui porte le même numéro sur la première moitié du côté suivant; par exemple, le point 6 qui avoisine A sur AD, au point 6 de AB; le point 5 de A1, moitié de AD, au point 5 de A6, première moitié du côté suivant AB, etc. L'intersection des droites 1.1 et 2.2, celle de 2.2 et de 3.3, celle de 3.3 et de 4.4, etc., seront des points d'une courbe très-peu différente d'un cercle qui aurait son centre à l'intersection des diagonales du carré et toucherait les quatre côtés à leurs points milieux 1, 1, 6, 6. Pour tracer cette courbe, il vous suffira d'en joindre les différens points, par des arcs faits à la main;

ou bien vous planterez des piquets près de ces points, les uns en dedans de quelque peu, les autres de quelque peu en dehors; vous engagerez de champ une règle ployante entre les piquets, et enfin vous ferez glisser le long de la règle une pointe à tracer.

Planter des arbres en quinconce.

Tracez deux droites d'équerre AB, AD (P. II, F. 46); portez sur l'une et sur l'autre, autant de fois l'intervalle de deux arbres, que vous voulez d'allées dans les deux sens perpendiculaires; achevez le rectangle ou le carré ABCD; portez le même intervalle sur les côtés BC, CD, autant de fois que les deux autres côtés le contiennent; puis joignez les points de division opposés; vous aurez des parallèles qui se couperont d'équerre et formeront des carrés. C'est aux intersections de toutes ces droites, sommets des carrés, que doivent être plantés les arbres: ils seront disposés en quinconce, c'est-à-dire qu'ils formeront des allées dans tous les sens.

Comparaison des quadrilatères.

118. Deux quadrilatères quelconques ABCD, A'B'C'D' sont égaux (P. II, F. 47), si la diagonale AC de l'un le partage en deux triangles ABC, ACD égaux aux triangles A'B'C', A'C'D', que la diagonale A'C' forme dans l'autre. Or, le triangle ABC=A'B'C', quand les côtés du premier égalent les côtés du second; le triangle ACD=A'C'D' dans la même circonstance (106). Nous pouvons donc dire, en principe, que *deux quadrilatères quelconques sont égaux lorsque les côtés et une diagonale de l'un égalent les côtés de même rang et la diagonale correspondante de l'autre.* Ainsi, quand vous aurez reconnu que AB=A'B', BC=B'C', CD=C'D', DA=D'A' et que AC=A'C', vous pourrez affirmer que la face ABCD=A'B'C'D'.

Construire un quadrilatère qui soit égal à un quadrilatère donné ABCD.

Il suffit de tirer la diagonale AC et de construire sur une droite A'C'=AC, deux triangles A'B'C', A'C'D' qui soient égaux aux triangles ABC,ACD (99, 100, 101).

119. *Deux trapèzes quelconques sont égaux, lorsque les côtés de l'un égalent les côtés correspondans de l'autre.* Ainsi, pour cette sorte de quadrilatères, il n'est pas nécessaire de reconnaître si l'une des diagonales a même longueur dans les deux figures. Cela provient de ce qu'on

opérant sur la grande base de l'un, avec les côtés concourans de l'autre, comme dans le n° 113, la petite base du second devrait couvrir exactement celle du premier, pour pouvoir être placée entre les deux arcs; alors les deux figures se confondraient.

120. *L'égalité des parallélogrammes quelconques a lieu dans les mêmes circonstances que celle des quadrilatères.* Par conséquent, pour les losanges, qui sont des parallélogrammes et dont les quatre côtés ont même longueur (115), *il y a égalité, quand le côté et une diagonale de l'un égalent le côté et une diagonale de l'autre.*

Partager un parallélogramme en un certain nombre de portions égales.

Il suffit de diviser deux côtés opposés en autant de parties égales qu'on veut de portions, et de joindre les points de division correspondans; car vous formez ainsi de petits parallélogrammes égaux, en nombre égal à celui des portions, puisque les côtés de chacun sont égaux aux côtés de même rang des autres et que les diagonales correspondantes étant parallèles, sont de même longueur (66).

Deux parallélogrammes sont équivalens, lorsqu'il y a égalité entre les bases et entre les hauteurs; car la diagonale de l'un le divise en deux triangles équivalens à ceux que forme la diagonale de l'autre (107). Ainsi, un parallélogramme et un rectangle qui, ne pouvant pas se couvrir exactement, ne sont point égaux, peuvent pourtant renfermer la même superficie.

Deux parallélogrammes qui ont seulement des bases égales, se contiennent comme leurs hauteurs. Si l'une des figures a une hauteur double ou triple de la hauteur de l'autre, sa superficie est aussi double ou triple de la superficie de cette autre; car on peut former dans le grand deux ou trois parallélogrammes équivalens au petit.

Deux parallélogrammes qui ont seulement des hauteurs égales, se contiennent comme leurs bases. Il suffit donc de mesurer et de comparer ces bases, pour comparer les superficies. Ainsi, dans le cas où l'une des bases serait de 2 mètres et l'autre de 3^m, le parallélogramme qui aurait la première base, serait les $\frac{2}{3}$ de celui qui aurait la seconde. On pourrait effectivement former dans la petite figure deux parallélogrammes, et dans la grande trois qui seraient équivalens entre eux.

121. L'égalité des rectangles a lieu dans les mêmes

circonstances que celle des trapèzes; mais comme les côtés opposés d'un rectangle sont égaux, on peut dire aussi qu'*il y a égalité entre deux rectangles, quand elle existe entre leurs bases et entre leurs hauteurs.* Du reste, il en est des rectangles qui ont seulement des bases égales ou seulement des hauteurs égales, comme des parallélogrammes quelconques, dans les mêmes cas, puisque le rectangle a tous les caractères du parallélogramme (116).

Deux carrés sont égaux dans les mêmes circonstances que les rectangles; mais comme la base et la hauteur d'un carré sont égales, on peut dire aussi que *deux carrés sont égaux, si le côté de l'un égale celui de l'autre.*

Partager un rectangle ou un carré en un certain nombre de portions égales.

Il suffit de diviser deux côtés opposés en autant de parties égales, qu'on veut de portions, et de joindre les points de division correspondans; car vous formez ainsi de petits rectangles, en nombre égal à celui des portions; ils ont la même longueur pour base, un des côtés de la grande figure pour hauteur, et par conséquent même superficie.

Mesurage des quadrilatères et des triangles.

122. L'unité de mesure des superficies est la superficie d'un carré qui a pour côté l'unité de mesure des longueurs. Si ce côté est un pouce, l'unité de superficie est dite *pouce carré*, ce qui signifie *carré d'un pouce de côté;* si le côté est d'un pied, on a le *pied carré*; s'il est d'une toise, d'une lieue, etc., il donne la toise *carrée*, la *lieue carrée*, etc.

L'ancienne *perche carrée* présentait un carré dont le côté était la perche linéaire ou des longueurs, qui avait 22 pieds. Un carré dont le côté contenait 10 perches linéaires ou 220 pieds, formait l'arpent des Eaux-et-forêts.

On employait aussi autrefois des rectangles, pour unités des superficies: la *toise-ligne* était un rectangle qui avait une toise de base sur une ligne de hauteur; la *toise-pouce* était un rectangle qui avait une toise sur un pouce; la *toise-pied* était un rectangle qui avait une toise sur un pied.

Le carré qui sert à mesurer les superficies, selon le système métrique ou décimal, se nomme *millimètre carré*, si le côté est un millimètre; *centimètre carré*, si le côté est un centimètre; *décimètre carré*, si le côté est un décimètre; *mètre carré* ou *centiare*, si le côté est un

mètre ; *décamètre carré* ou *are* ou *perche métrique*, si le côté a 10 mètres : *hectomètre carré* ou *hectare* ou *arpent métrique*, si le côté a 100 mètres ; *kilomètre carré* ou *myriare*, si le côté a 1000 mètres, enfin *myriamètre carré*, si le côté a 10000 mètres.

On emploie aussi des rectangles métriques, pour unités de superficie ; les uns ont un mètre pour base et un millimètre ou un centimètre ou un décimètre pour hauteur ; les autres ont un décamètre pour base, et un mètre ou un décimètre pour hauteur.

123. Quelle que soit l'unité de superficie, un rectangle la contient autant de fois que l'exprime le produit de la base, mesurée avec la base de cette unité, multipliée par la hauteur, mesurée avec la hauteur de la même unité ; en d'autres termes, *la superficie d'un rectangle égale le produit de la base par la hauteur*. Ce principe a pour formule $R=B\times H$.

Supposons d'abord que l'unité de superficie soit un carré, et prenons pour exemple le rectangle ABCD (P. II, F. 46). Si le côté du carré est contenu 6 fois dans la base CD, nous obtiendrons 6 bandes rectangulaires, en traçant des parallèles à CB, par les points de division ; et si le même côté est contenu 8 fois dans la hauteur AD, nous diviserons chacune des 6 bandes en 8 carrés égaux, au moyen de parallèles à AB, menées par les points de division de AD. Or, il est clair que pour avoir le nombre total 48 des carrés du rectangle, il suffit de répéter le nombre des carrés d'une bande, autant de fois qu'il y a de bandes, et cela revient à multiplier 8, longueur de la hauteur AD mesurée avec le côté du carré, par 6, longueur de la base CD mesurée avec le même côté.

Si donc vous voulez mesurer en mètres carrés la superficie d'un rectangle tel que ABCD, vous mesurerez sa base et sa hauteur avec le mètre linéaire, et vous ferez le produit des deux longueurs trouvées. Si vous voulez obtenir la même superficie en toises carrées, vous mesurerez la base et la hauteur avec la toise linéaire, et vous ferez aussi le produit des deux longueurs trouvées.

Supposons maintenant que l'unité de superficie soit un rectangle dont la base ait une longueur b et la hauteur une longueur h (P. II, F. 48). Supposons encore que la base AB du rectangle ABCD à mesurer, contienne 3 fois b, et que la hauteur AD contienne 4 fois h. Des parallèles à AD menées par les points de division de AB, donneront 3 ban-

des rectangulaires qui auront chacune b pour base et AD pour hauteur ; des parallèles à AB menées par les points de division de AD, partageront chacune de ces bandes en 4 petits rectangles qui auront chacun b pour base et h pour hauteur. Or, pour connaître le nombre total 12 de ces petits rectangles, il suffit de répéter le nombre de ceux d'une bande, autant de fois qu'il y a de bandes, et cela revient à multiplier 4, longueur de la hauteur AD mesurée avec h, par 3, longueur de la base AB mesurée avec b.

Si donc il s'agissait de mesurer en toise-pieds la superficie d'un rectangle tel que ABCD, vous mesureriez sa base AB avec la toise et sa hauteur AD avec le pied : le produit des deux longueurs trouvées vous donnerait le nombre de toise-pieds demandé. S'il fallait obtenir la même superficie en rectangles d'un mètre de base, sur un décimètre de hauteur, vous mesureriez AB en mètres et AD en décimètres : le produit serait le nombre des petits rectangles contenus dans le grand.

124. Ce qui vient d'être dit du mesurage d'un rectangle, s'applique aussi à celui d'un carré, puisque le carré n'est qu'un cas particulier du rectangle. Il s'ensuit que la toise carrée contient 36 pieds carrés, car les deux côtés de la toise carrée contiennent chacun 6 pieds linéaires, et $6 \times 6 = 36$. Pour une raison analogue, le pied carré vaut 144 pouces carrés, le pouce carré vaut 144 lignes carrées ; la perche carrée vaut 484 pieds carrés, l'arpent vaut 100 perches carrées (122).

Vous voyez aussi que le myriamètre carré contient 100 kilomètres carrés ou myriares, puisque le myriamètre linéaire vaut 10 kilomètres linéaires. Pour la même raison, le myriare vaut 100 hectares, l'hectare vaut 100 ares, l'are vaut 100 centiares ou mètres carrés, le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, et le centimètre carré vaut 100 millimètres carrés.

Le principe du n° 123 montre encore que la toise carrée renferme 6 toise-pieds, que la toise-pied équivaut à 12 toise-pouces ou à 6 pieds carrés, et que la toise-pouce fait 12 toise-lignes ou 72 pouces carrés.

Quant aux rectangles métriques, chacun est le dixième de celui qui a une hauteur décuple de la sienne ; le rectangle d'un mètre de base et d'un millimètre de hauteur, par exemple, est le dixième du rectangle d'un mètre de base et d'un centimètre de hauteur. Il s'ensuit que le mètre

carré vaut 10 mètre-décimètres. Il est visible d'ailleurs que le mètre-décimètre contient 10 décimètres carrés, que le mètre-centimètre contient 100 centimètres carrés, etc.

125. *Mesurer un rectangle en mètres carrés et parties rectangulaires ou décimales du mètre carré.*

Mesurez sa base et sa hauteur en mètres et parties du mètre. La première contiendra, par exemple, $3^{m},455$ et la seconde $2^{m},32$. Vous multiplierez ces deux nombres l'un par l'autre ; le produit $8^{mm},0156$ indiquera que la superficie du rectangle vaut 8 mètres carrés et 156 dix-millièmes de mètre carré, ou 8 mètres carrés, 1 mètre-centimètre, 5 mètre-millimètres et 6 dixièmes de mètre millimètre (124).

Remarquez que les mètres carrés se désignent par deux *m*.

126. *Mesurer un rectangle en mètres carrés et parties carrées.*

Mesurez la base et la hauteur en mètres et parties du mètre. Si, comme dans le cas précédent, la première contient $3^{m},455$, et la seconde $2^{m},32$, vous multiplierez aussi ces deux nombres l'un par l'autre. Le produit $8^{mm},0156$ indiquera que la superficie du rectangle renferme 8 mètres carrés, un décimètre carré, et 56 centimètres carrés (124).

Cela vous montre que le second mesurage se fait absolument comme le premier ; seulement, *pour obtenir les parties carrées ou centésimales du mètre carré, il faut partager en groupes de deux chiffres, à partir de la virgule, les décimales qui accompagnent le nombre de mètres carrés.* Si le dernier groupe à droite n'avait qu'un chiffre, vous le compléteriez en écrivant un zéro à la suite de ce chiffre.

127. *Mesurer un rectangle en hectares.*

Mesurez la base et la hauteur au moyen de la chaîne métrique. Cette chaîne est un décamètre linéaire : elle a 10 mètres, mesure prise depuis l'extrémité intérieure d'une des *poignées* en fer qui la terminent, jusqu'à l'extrémité intérieure de l'autre. Comme les chaînons dont elle est formée, ont 5 décimètres chacun, et que les mètres y sont marqués par des anneaux de laiton, elle permet d'apprécier les mètres et même les décimètres que contient une longueur, en sus d'un certain nombre de décamètres.

Supposons donc qu'à l'aide d'une chaîne nouvelle, vous ayez trouvé 15 décamètres, 4 mètres, 5 décimètres, ou $15^{Dm},45$ pour la base du rectangle, et 9 décamètres, 3 mè-

tres, 2 décimètres, ou $9^{Dm},32$ pour la hauteur.

Vous multiplierez l'un par l'autre, les deux nombres $15^{Dm},45$ et $9^{Dm},32$. Le produit $143^{a},9940$ indiquera que le rectangle contient 143 décamètres carrés ou ares, 99 centiares et 40 centièmes de centiares (124).

Mais, on néglige ordinairement les fractions du centiare ; par conséquent, le rectangle donné vaut 143 ares et 99 centiares, ou 1 hectare, 43 ares, 99 centiares.

Si vous négligiez les décimètres de la base et de la hauteur, vous ne trouveriez que 1 hectare, 43 ares et 22 centiares. Il y aurait donc une erreur en moins de 77 centiares, erreur beaucoup trop grande pour qu'on s'expose à la commettre.

Ainsi, *pour mesurer un rectangle en hectares, il faut mesurer la base et la hauteur en décimètres, multiplier les deux longueurs l'une par l'autre, séparer 6 décimales et barrer les deux dernières.*

En suivant cette règle, vous auriez, dans l'exemple précédent, à multiplier 1545^{dm} par 932^{dm}; vous mettriez une virgule entre le 6e et le 7e chiffre du produit 1439940 ; vous effaceriez les deux premiers à droite, et vous obtiendriez $1^{ha},4399$.

128. *Mesurer un rectangle en toises carrées et parties carrées de la toise carrée.*

Supposons que la base du rectangle soit de $5^{t}\ 4^{pi}$ et que la hauteur ait $2^{t}\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{li}$. Vous convertirez ces deux longueurs en unités de la plus petite des espèces qu'elles renferment, en lignes par conséquent. Elles donneront, la première 4896^{l}, la seconde 1834^{li}. Multipliant l'un par l'autre ces deux nombres de lignes, vous trouverez $8979264^{l.l}$ pour la superficie du rectangle, et il vous restera à chercher combien ce nombre de lignes carrées forme de pouces carrés, de pieds carrés et de toises carrées. A cet effet, vous diviserez $8979264^{l.l}$ par $144^{l.l}$ valeur d'un pouce carré ; le quotient donne exactement $62356^{p.p}$; il n'y a donc pas de lignes carrées dans le rectangle proposé. Divisant ensuite le nombre de pouces carrés par $144^{p.p}$ valeur d'un pied carré, vous obtiendrez $4^{p.p}$ pour reste et $433^{p.p}$ pour quotient. Divisant enfin le nombre de pieds carrés par $36^{p.p}$ valeur d'une toise carrée, vous trouverez pour reste $1^{p.p}$ et pour quotient 12^{tt}. Ainsi, le nombre $8979264^{l.l}=12^{t.t}\ 1^{p.p}\ 4^{p.p}$, ou bien la superficie du rectangle vaut 12 toises carrées, 1 pied carré et 4 pouces carrés.

129. *Mesurer un rectangle en toises carrées et parties rectangulaires de la toise carrée.*

Supposez que la base du rectangle soit, comme dans le cas précédent, $5^{t}\ 4^{pi}$ et que la hauteur ait aussi $2^{t}\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{li}$. Vous ferez le produit de ces deux longueurs, par une multiplication complexe, en considérant le multiplicande $2^{t}\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{l}$, par exemple, comme exprimant des toises carrées, des toise-pieds, des toise-pouces, des toise-lignes, et en observant que la toise-pied vaut $\frac{1}{6}$ de la toise carrée, que la toise-pouce vaut $\frac{1}{12}$ de la toise-pied, que la toise-ligne vaut $\frac{1}{12}$ de la toise pouce (124). Voici l'opération :

	$2^{t.t}$	$0^{t.pi}$	$8^{t.po}$	$10^{t.l}$	
	5^{t}	4^{pi}			
Pour 5 toises.	$10^{t.t}$				
		$3^{t.pi}$	$4^{t.po}$		
			4	$2^{t.l}$	
Pour 3^{pi} ou $1/2$ toise. .	1	0	4	5	
Pour 1^{pi} ou $1/3$ de 3^{pi} .		2	1	5	$2/3$
	$12^{t.t}$	$0^{t.pi}$	$2^{t.po}$	$0^{t.l}$	$2/3$

Le résultat est exactement égal au précédent $12^{t.t}\ 1^{p.p}\ 4^{p.p}$, car une toise-ligne vaut $864^{l.l}$ dont les $\frac{2}{3}$ font $576^{l.l}$ ou $4^{p.p}$; $1^{t.po}$ vaut $72^{p.p}$, et $2^{t.po}$ valent $144^{p.p}$ ou $1^{p.p}$.

Remarquez que je n'ai point fait de produits auxiliaires, pour passer des toises carrées aux toise-pouces, puis aux toise-lignes. J'ai dit 5 fois $8^{t.po}$ font $40^{t.po}$ qui, divisées par 12, donnent $3^{t.pi}$ et $4^{t.po}$; 5 fois $10^{t.l}$ font $50^{t.l}$ qui, divisées par 12, donnent $4^{t.po}$ et $2^{t.l}$. On arriverait toutefois au même résultat, en faisant des produits auxiliaires.

130. *Mesurer un rectangle en arpens et perches carrées.*

A l'aide de la perche linéaire, ancienne chaîne d'arpenteur, longue de 22^{pi}, vous trouverez, par exemple, 23 perches 5^{pi} dans la base et $12^{p}\ 18^{pi}$ dans la hauteur. Faites une multiplication complexe avec ces deux nombres, en regardant le multiplicande comme exprimant des perches carrées et des perche-pieds, observant qu'il y a 22 perche-pieds dans une perche carrée, et décomposant les pieds en 11, plus un certain nombre de fois 2, plus 1. Vous trouverez ainsi $297^{pp}\ 15^{ppi}\ \frac{15}{44}$.

Ayant le nombre des perches carrées, il ne s'agit plus que de séparer les deux premiers chiffres à droite, dans la partie entière, pour avoir le nombre des arpens (124). La superficie demandée est donc à-peu-près $2^{arp}\ 97^{pp}\ 15^{ppi}$.

131. *Combien faut-il de rouleaux de papier à ten-*

ture, pour couvrir un pan de mur qui n'a aucune ouverture, dont la longueur est $3^m,55$ *et dont la hauteur est* $2^m,80$?

La superficie du mur est $3^m,55 \times 2^m,80 = 9^{mm},94$. Un rouleau de papier contient 24 feuilles qui ont environ $0^m,35$ de hauteur sur $0^m,46$ de largeur. La longueur du rouleau est donc $0^m,35 \times 24 = 8^m,40$. Comptons seulement $8^m,20$ à cause des rognures. La superficie d'un rouleau sera $8^m,20 \times 0^m,46 = 3^{mm},77$, car le rouleau développé est un rectangle, comme le pan de mur. Cherchant combien de fois $9^{mm},94$ contiennent $3^{mm},77$, nous trouverons qu'il faut 2,64 rouleaux ou à-peu-près 2 rouleaux et 16 feuilles.

Cet exemple vous montre que *pour comparer deux rectangles quelconques, on doit calculer leurs superficies en unités de même espèce et diviser celle du plus grand par celle du plus petit;* le quotient indique combien de fois le premier contient le second.

132. *Un rectangle a* 4^m *de base et* $1^m,2$ *de hauteur. On veut en faire un autre qui soit équivalent à celui-là, et qui n'ait que* 3^m *de base; quelle hauteur doit-on lui donner?*

Le rectangle dont la hauteur est connue a $4^{mm},8$ de superficie. L'autre devant être équivalent à celui-là, aura aussi une superficie de $4^{mm},8$. Or, ce nombre doit égaler le produit de la base 3^m multipliée par la hauteur inconnue. Si donc vous divisez $4^{mm},8$ par 3^m, vous trouverez cette hauteur pour quotient. Ainsi, le nouveau rectangle devra avoir $1^m,6$ de hauteur.

133. Tout ce qui a été dit du mesurage des rectangles, s'applique entièrement à celui des carrés. Mais, comme la base et la hauteur d'un carré sont égales, il suffit, pour calculer la superficie d'une telle figure, de mesurer un des côtés et de multiplier par elle-même la longueur trouvée. Ainsi, un carré dont le côté serait de $4^m,7$, aurait $22^{mm},09$ de superficie. Or, ce nombre 22,09 qui résulte de $4,7 \times ,4,7$ est le quarré du côté (96). De là ce principe: *la superficie d'un carré égale le quarré numérique du côté.*

Représentant un carré quelconque par C et la longueur du côté par L, on a pour formule $C = L \times L$.

134. *Faire un carré qui soit équivalent à la somme de plusieurs autres.*

Soient A, B, C les carrés donnés (P. II, F. 49). Vous tracerez deux droites d'équerre (43); vous porterez sur l'une le côté du carré A, de D en E, et sur l'autre le côté du

carré B, de D en F. Le carré qui serait fait sur EF, vaudrait la somme des carrés A, B, puisque les superficies sont exprimées par les quarrés des côtés (133), et que le quarré de la longueur EF égale la somme des quarrés des longueurs DE, DF (112). Elevez maintenant une perpendiculaire à l'une des extrémités de EF, au point E, par exemple (39 ou 40), et portez-y le côté de C, de E en G. La droite FG sera le côté d'un carré qui vaudra la somme de C et du carré fait sur EF. Si donc vous faites un carré avec FG (117), il sera équivalent à la somme des trois carrés donnés.

Vous pourriez évidemment, par le même moyen, doubler ou tripler un carré : il suffirait de prendre les longueurs DE, DF, EG, égales chacune au côté du carré donné.

135. *On a besoin pour construire des bâtimens, d'un espace carré qui renferme* 273,529^{mm}; *quel est le côté de ce carré?*

Le nombre 273529 est le quarré de la longueur du côté (133). Il faut donc en extraire la racine, pour connaître cette longueur. En opérant comme il est prescrit dans le n° 96, on trouve que le côté du carré doit avoir 523^{m}. Vous construiriez la figure soit au moyen du procédé 116, soit au moyen de celui du n° 117.

Il est visible, d'après cela, que *pour avoir le côté d'un carré qui soit équivalent à une figure donnée, on doit mesurer la superficie de cette figure, puis extraire la racine du nombre obtenu.*

136. Si un parallélogramme quelconque et un rectangle ont des bases égales et des hauteurs égales, ils sont équivalens (120). *La superficie du parallélogramme se mesure donc comme celle du rectangle : il faut en multiplier la base par la hauteur.* Ainsi, la formule est $P=B\times H$.

Supposez que la base CD du parallélogramme ABCD (P. II, F. 40) ait 6^{m},50 et que la hauteur FG soit de 5^{m},25. La formule donne $P=6^{m},50\times5^{m},25=35^{mm},125$. Vous trouveriez encore le même nombre de mètres carrés, si vous mesuriez comme base le côté BC, et comme hauteur une perpendiculaire abaissée sur BC, d'un point quelconque de AD.

On veut connaître combien coûtera en totalité le crépi d'un mur de cimetière, et l'on sait que le mètre carré se paie 0^{f},45, *que la forme du terrain est celle d'un rectangle, que ce rectangle a deux côtés horizontaux de* 123^{m} *chacun et deux côtés inclinés de* 85^{m}, *que la pente*

totale de ces derniers est de $8^m,50$ *et que la hauteur verticale des murs sera de* 2^m.

Les murs qui seront élevés selon la rampe, auront pour faces à crépir, des parallélogrammes tels que ABCD (P. II, F. 50) dont la base $BC=2^m$ et dont la hauteur est l'horizontale AE. Nous calculerons cette hauteur au moyen du triangle rectangle AEB, dans lequel $BE=8,50$ et l'hypothénuse $AB=85^m$; nous trouverons (112) que $AE=84^m,573$. La superficie de chaque parallélogramme sera donc $169^{mm},146$. Il faut la quadrupler pour avoir la surface totale des deux murs en pente, car ils ont chacun une face intérieure et une face extérieure. Or, $169^{mm},146 \times 4 = 676^{mm},584$.

Les faces à crépir des deux autres pans de mur, sont des rectangles égaux dont la base a 123^m et la hauteur 2^m. La superficie d'un de ces rectangles sera donc $123^m \times 2^m = 246^{mm}$; quadruplant, nous aurons 984^{mm} pour la surface totale des deux pans rectangulaires; ajoutant à ces 984^{mm}, les $676^{mm},584$ déjà trouvés, nous saurons que la superficie du crépi sera de $1660^{mm},584$; multipliant enfin $0^f,45$ par ce nombre de mètres carrés, nous obtiendrons $747^f,26$ pour le prix demandé.

137. *Un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur*; car si par le sommet B du triangle BCD (P. II, F. 40), vous menez une parallèle à la base CD, et par D, une parallèle au côté BC, vous formerez un parallélogramme ABCD qui aura même base et même hauteur que le triangle, et qui le contiendra deux fois. Les deux triangles BCD, DAB sont effectivement égaux, puisque les côtés de l'un égalent les côtés de l'autre (106). Or, la superficie du parallélogramme est le produit de la base CD multipliée par la hauteur FG; celle du triangle BCD sera donc la moitié de ce produit. Ainsi, *pour mesurer un triangle, il faut mesurer la base et la hauteur avec la même unité, faire le produit des deux longueurs trouvées et prendre la moitié de ce produit.* Ce principe converti en formule, donne $T=\frac{B \times H}{2}$.

Le résultat reste le même, quel que soit le côté qu'on prenne pour base, pourvu que la hauteur égale la perpendiculaire abaissée sur ce côté, du sommet opposé.

On veut couvrir la croupe triangulaire d'un toit, avec des tuiles plates de $0^m,24$ *sur* $0^m,16$ *qui, à cause des parties superposées, entrent au nombre de* 70 *dans le*

mètre carré. La base du triangle a $12^m,50$ *et la hauteur* $3^m,15$. *Combien faudra-t-il de tuiles ?*

Vous aurez, d'après la formule, $T=\frac{12^m,50\times3^m,15}{2}=$ $19^{mm},6875$. Multipliant 70 par ce nombre de mètres carrés, vous obtiendrez en nombre entier 1379, pour la quantité de tuiles demandée.

138. Il peut arriver et il arrive assez souvent que l'intérieur d'un triangle présente des obstacles qui empêchent d'en mesurer la hauteur. Dans ce cas, on prolonge la base AC (P. II, F. 33); on mène une parallèle BD à cette base, par le sommet opposé B (49 ou 50), et en un point quelconque F du prolongement, on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de BD (38). Cette perpendiculaire DF=BE hauteur du triangle ABC, puisque ces droites sont des parallèles comprises entre parallèles (66).

Vous pouvez aussi, au lieu d'employer ce procédé, *calculer la superficie du triangle au moyen des trois côtés.* C'est même là ce qu'il faut faire, toutes les fois que les longueurs de ces côtés sont connues, afin d'éviter le mesurage de la hauteur et l'erreur qui en est inséparable.

Soit proposé de déterminer la superficie d'un triangle dont les trois côtés ont 15^m, 23^m, $32^m,25$. Vous ferez la somme de ces trois longueurs; vous prendrez la moitié de cette somme $70^m,25$ et vous aurez $35^m,125$. Cherchez alors l'excès de la demi-somme 35,125 sur chaque côté; vous trouverez 35,125—15=20,125, puis 35,125—23 =12,125, puis 35,125—32,25=2,875. Multipliez ensuite la demi-somme 35,125 par le 1er excès 20,125, vous aurez 706,890 625; multipliez ce produit par le 2e excès 12,125, vous aurez 8 571,048828; multipliez ce second produit par le 3e excès 2,875, vous aurez 24 641,765 38; extrayez enfin la racine de ce troisième produit (96), vous obtiendrez $156^{mm},976$ pour la superficie du triangle.

Remarquez qu'il suffit de conserver 6 décimales dans chaque produit, lorsqu'on veut se borner aux millièmes de mètre carré pour la superficie. Il suffirait d'en conserver 4, si l'on voulait se borner aux centièmes de la racine quarrée. Bien entendu qu'il faut augmenter d'une unité la dernière des décimales conservées, quand la première de celles qu'on supprime n'est pas moindre que 5.

Pour ne point courir le risque de se tromper dans les calculs de ce mesurage, il faut les faire d'après la for-

mule $T=\sqrt{\frac{s}{2}\times\left(\frac{s}{2}-C\right)\times\left(\frac{s}{2}-C'\right)\times\left(\frac{s}{2}-C''\right)}$ dans laquelle T représente la superficie du triangle, s la somme des trois côtés, et C, C′, C″ chacun de ces côtés. Les parenthèses ( ) indiquent qu'on doit opérer la soustraction des deux quantités qu'elles renferment, avant de multiplier.

139. C'est au moyen du mesurage des triangles, que s'exécute celui d'un quadrilatère quelconque ABCD (P. II, F. 47) qui n'est ni rectangle, ni carré, ni parallélogramme, ou dont la forme n'est pas connue. On calcule la superficie de chacun des triangles ABC, ACD formés par une diagonale (137 ou 138), et la somme des deux nombres trouvés donne la superficie du quadrilatère.

Il est à observer que la diagonale AC doit être prise pour base de chaque triangle, toutes les fois qu'elle peut être mesurée directement, afin qu'il n'y ait que trois mesurages de longueurs à effectuer, au lieu de quatre. Cependant, si le quadrilatère était reconnu trapèze, vous n'auriez non plus que trois droites à mesurer, en prenant pour bases des deux triangles, les cotés parallèles de la figure. Dans ce cas, vous multiplieriez AB, puis CD par la hauteur EF commune aux triangles ABD, BCD (P. II, F. 39), et vous feriez la somme des moitiés des deux produits; ou pour éviter une multiplication et une division, vous ajouteriez les longueurs des bases AB, CD; vous prendriez la moitié du résultat, et vous multiplieriez cette demi-somme des bases du trapèze, par la hauteur EF; le produit serait la superficie cherchée.

Ainsi, *le trapèze égale le produit de la demi-somme de ses bases, multipliée par la hauteur.* Ce principe converti en formule, donne $T=\frac{B+b}{2}\times H$.

POLYGONES RÉGULIERS.

140. Des polygones dont le nombre de côtés surpasse 4, il n'y a que les réguliers qui donnent lieu à des tracés intéressans (97). Ceux-là sont aussi les seuls dont les propriétés doivent maintenant nous occuper. Voici néanmoins un premier principe qui concerne à la fois les polygones réguliers et les irréguliers. *La somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque, vaut deux angles droits ou* 180° *multipliés par leur nombre diminué de* 2.

Vous voyez effectivement qu'un polygone ABCDE (P.II, F.38) a autant de diagonales qui partent d'un même sommet A, que l'exprime le nombre des angles diminué de 3, et comme le nombre de ces diagonales est inférieur d'une unité à celui des triangles qu'elles forment, il y a autant de ces triangles que l'indique le nombre des angles du polygone diminué de 2. Or, ces angles sont composés de ceux des triangles, et la somme des angles de chaque triangle est 180° (98). Donc, la somme des angles du polygone vaut 180° multipliés par le nombre des triangles ou par le nombre même de ces angles diminué de 2.

Trouver l'indication de l'angle intérieur d'un polygone régulier.

Comptez les angles du polygone; ôtez deux unités de leur nombre; multipliez 180° par le reste, vous aurez la somme des indications de tous ces angles. Or, ils sont égaux, puisque le polygone est régulier; si donc vous divisez le produit par leur nombre, le quotient sera l'indication d'un seul. Ces calculs sont indiqués plus brièvement par la formule $a=\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$ dans laquelle a représente l'angle intérieur et n le nombre des angles du polygone.

Voulez-vous connaître, par exemple, l'angle intérieur d'un carré? La formule donne $a=\frac{180^\circ\times(4-2)}{4}=\frac{180^\circ\times 2}{4}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$, ce que vous saviez déjà. Faisant les mêmes opérations pour le triangle équilatéral, vous verriez que son angle intérieur est de 60°, principe qui a été établi dans le n° 104.

141. Les polygones qui ont plus de 4 angles ou de 4 côtés, se nomment *pentagones* s'ils en ont 5, *hexagones* s'ils en ont 6, *octogones* s'ils en ont 8, *décagones* s'ils en ont 10, *dodécagones* s'ils en ont 12, *pentédécagones* s'ils en ont 15. Les autres polygones étant rarement employés dans les arts, ne portent pas de noms particuliers, ou bien ceux qu'ils ont reçus sont peu usités.

Tracer un pentagone régulier.

Décrivez un cercle quelconque; tracez AB un des diamètres (P.II, F. 51); élevez au milieu une perpendiculaire; cherchez le milieu E du rayon CD (45); rapportez EC sur EB, de E en F, et BF de B en G. La corde BG pourra être portée 10 fois exactement sur la

circonférence; elle la divisera donc en 10 arcs de 36°. Par conséquent, si vous tirez les cordes des arcs doubles ou de 72°, vous aurez 5 droites égales (15) qui formeront un pentagone régulier BHIKL. Les angles sont effectivement égaux comme les côtés, car ils sont tous inscrits, chacun renferme entre ses côtés $\frac{3}{5}$ de circonférence ou 3 fois 72° ou 216°, et son indication est par suite de 108° (33).

Un polygone qui a, comme le pentagone BHIKL, tous ses sommets sur une circonférence, est dit *inscrit*. Lorsqu'un polygone régulier est *inscrit*, le centre de la circonférence est aussi le *centre* du polygone, c'est-à-dire le point également écarté des sommets, ainsi que des côtés qui sont des cordes de même longueur. L'angle formé par des rayons CB, CL menés à deux sommets voisins, est *l'angle au centre* du même polygone, et l'indication de cet angle égale 360° divisés par le nombre des côtés. L'arc BL est effectivement la cinquième partie de la circonférence (15).

142. *Tracer un pentagone régulier dont le côté M est donné* (P. II, F. 51).

Faites un pentagone régulier quelconque BHIKL, en suivant le procédé précédent; portez la longueur M sur un côté BL, de B en N; par le point N, menez NO parallèlement au rayon CB, jusqu'au prolongement du rayon CL, et par le point O menez OP parallèlement à BL, jusqu'au prolongement de CB. La droite OP est égale à BN (66) et par suite à M; de plus, elle est placée comme BL, par rapport aux rayons CB, CL. Si donc, avec CO ou CP, vous décrivez une circonférence concentrique à celle dont BC est le rayon, vous pourrez y porter exactement 5 fois la corde OP, et vous formerez par là le pentagone demandé.

Ce procédé est général: il s'applique à tous les polygones réguliers; de sorte que *pour tracer un polygone régulier dont le côté est donné, il faut commencer par construire un polygone régulier de même nom, dont les côtés aient une longueur arbitraire.*

143. *Tracer un hexagone régulier.*

Décrivez un cercle quelconque; prenez une ouverture de compas égale au rayon AB (P. II, F. 52), et portez-la, comme corde, sur la circonférence, à partir d'un point quelconque B. Vous reviendrez au même point,

après avoir marqué six arcs égaux, et si vous joignez chaque point de division au point voisin, vous formerez l'hexagone régulier BCDEFG.

Ce tracé suppose que la corde BC d'un arc de 60°, sixième partie de la circonférence, est égale au rayon BA. Or, cette égalité est vraie : puisque l'angle BAC est de 60°, les deux autres angles du triangle ABC valent en somme 180°—60° ou 120° (98), et comme le triangle est symétrique, chacun de ces deux angles est de 60° (102); ce qui apprend que le triangle ABC est équilatéral (104) et que par conséquent BC=BA.

144. *Tracer un octogone régulier.*

Décrivez un cercle quelconque, tirez deux diamètres d'équerre AB, CD (P. II, F. 53) et joignez leurs extrémités ; vous formerez un carré inscrit ACBD (117). Par le centre E, menez ensuite des parallèles aux côtés de ce carré ; vous diviserez chaque quart de la circonférence en deux parties égales (63); la courbe se trouvera divisée en 8 arcs égaux, et par conséquent, si vous joignez chaque point de division au point voisin, vous obtiendrez l'octogone régulier AFCGBHDI.

145. *Tracer un décagone régulier.*

Il faut faire ce qui a été prescrit dans le n° 141, pour trouver la corde de 36°, dixième partie de la circonférence, car cette corde est évidemment le côté du décagone régulier inscrit. Quand la corde BG (P. II, F. 51) est trouvée, on la porte 10 fois sur la circonférence, puis on joint chaque point de division au point voisin.

146. *Tracer un dodécagone régulier.*

Décrivez un cercle quelconque ; tirez deux diamètres d'équerre AB, CD (P. II, F. 54) ; de chaque extrémité de ces diamètres, marquez des arcs de 60°, des deux côtés, avec une ouverture de compas égale au rayon. Comme l'arc AC=90° et que l'arc AE sera de 60°, l'arc EC vaudra 30°; comme l'arc CF sera de 60°, l'arc AF vaudra aussi 30°. La circonférence se trouvera donc partagée en arcs de 30° ou en douze parties égales ; par conséquent, les cordes de ces arcs formeront un dodécagone régulier AFECGHBIKDLM.

147. *Tracer un pentédécagone régulier.*

Décrivez un cercle arbitrairement ; cherchez la corde de 36 degrés (141) et portez-la sur la circonférence, d'un point quelconque A en un point B (P. II, F. 55); rappor-

tez ensuite le rayon AC, de A en D. L'arc AD sera de 60°; l'arc BD qui vaut AD—AB, aura donc 24° excès de 60° sur 36°. Or, 24° est précisément la quinzième partie de 360°. Vous pourrez donc porter la corde BD exactement 15 fois sur la circonférence. Joignant chaque point de division au point voisin, vous aurez enfin le pentédécagone demandé.

148. La Géométrie élémentaire ne fournit point de procédé pour tracer exactement les polygones réguliers de 7, 9, 11, 13, 17 côtés, ni ceux dont le nombre de côtés est multiple d'un quelconque de ces nombres. Quant aux multiples des polygones dont vous venez d'apprendre la construction, la Géométrie n'enseigne à tracer rigoureusement que ceux qui sont indiqués par les nombres 16, 32, 64 et ainsi de suite en doublant toujours, par les nombres 20, 40, 80 et ainsi de suite en doublant toujours, par les nombres 24, 48, 96, etc., et par les nombres 30, 60, 120; etc. Le procédé est le même pour tous ces polygones: il consiste à faire un octogone régulier inscrit, ou un décagone, ou un dodécagone, ou un pentédécagone, et à diviser en 2, 4, 8, etc., parties égales, les arcs dont les côtés du polygone tracé sont les cordes (63). De cette façon, l'octogone régulier, par exemple, fournira le polygone régulier de 16 côtés, celui-là produira le polygone de 32 côtés, ce dernier donnera le polygone de 64 côtés, et ainsi des autres.

149. Les tracés des polygones réguliers conduisent à établir en principe, qu'une circonférence qui passe par 3 sommets d'un de ces polygones, passe aussi par tous les autres; elle est dite alors *circonscrite* au polygone. Le procédé au moyen duquel on fait passer un cercle par 3 points (63), peut donc servir à *circonscrire une circonférence à un polygone régulier*.

Si du centre A d'un polygone régulier quelconque (P. II, F. 56), on abaisse une perpendiculaire sur un côté BC, et qu'avec AD pour rayon, on décrive un cercle, du point A, ce cercle aura le côté BC et tous les autres pour tangentes (51), car toutes les perpendiculaires AD, AE, etc., ont même longueur, attendu que les triangles CAB, BAF, etc., sont égaux, par suite de l'égalité qui existe entre leurs côtés correspondans (106). Dans cette position, la circonférence est dite *inscrite* au polygone ou bien le polygone est dit *circonscrit* au cercle.

COMPARAISON DES POLYGONES.

150. L'égalité de deux polygones quelconques a lieu dans des circonstances analogues à celles où existe l'égalité des quadrilatères (118). *Il faut que les côtés de l'un et les diagonales tirées d'un des sommets, soient de même longueur que les côtés correspondans et les diagonales correspondantes de l'autre;* car alors la première figure se trouve composée de triangles égaux à ceux de la seconde, et comme les triangles égaux sont placés dans le même ordre, les deux polygones peuvent se couvrir exactement.

Vous pourrez donc *faire un polygone qui soit égal à un polygone quelconque et donné*, en suivant ce qui a été prescrit pour copier exactement un quadrilatère (118).

151. *Deux polygones réguliers sont égaux, lorsqu'ils portent le même nom et que le côté de l'un est égal au côté de l'autre;* car alors tous les angles (140) et tous les côtés du premier (97) sont égaux aux angles et aux côtés du second; d'où il suit que les deux figures peuvent se couvrir exactement.

Construire un polygone régulier qui soit égal à un polygone régulier donné, revient donc à tracer un polygone régulier de même nom dont le côté est connu (142).

152. *Deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables, placés dans le même ordre.*

Si nous supposons, par exemple, que les angles du polygone ABCDE soient égaux aux angles de même rang du polygone *abcde* (P. II, F. 38), et que les côtés du premier contiennent les côtés correspondans du second le même nombre de fois (97), les trois triangles formés dans le premier, par les diagonales tirées du sommet A, seront semblables aux trois triangles formés dans le second, par les diagonales tirées du sommet *a*.

En effet, de ce que l'angle B=*b* et de ce que AB contient *ab* comme BC contient *bc*, résulte la similitude des triangles BCA, *bca* (110), et de plus l'égalité des angles BCA, *bca*. Or, de cette dernière égalité et de ce que l'angle BCD=*bcd*, suit que l'angle ACD=*acd*. La similitude des deux triangles fait d'ailleurs que AC contient *ac* comme BC contient *bc*, et parce que BC contient *bc* comme CD contient *cd*, AC contient *ac* comme CD contient *cd*. Les deux triangles ACD, *acd* se trouvent donc dans le cas des premiers et sont semblables.

On démontrerait par le même raisonnement, la similitude des triangles suivans, s'il y en avait plus de trois, et celle des derniers, comme celle des premiers.

Il suffit donc pour prononcer que deux polygones quelconques sont semblables, d'avoir reconnu qu'ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, placés dans le même ordre.

Pour les polygones réguliers, le caractère de la similitude est beaucoup plus simple : *Deux polygones réguliers sont semblables, s'ils portent le même nom.* Alors en effet, les angles de l'un égalent les angles de l'autre (140), et deux côtés correspondans se contiennent comme deux autres côtés correspondans quelconques, puisque dans chaque figure tous les côtés ont même longueur.

Deux polygones semblables se contiennent comme les quarrés numériques de deux quelconques de leurs droites correspondantes.

Deux choses se contiennent nécessairement comme leurs fractions de même dénominateur, comme leurs moitiés, comme leurs tiers, par exemple. Conséquemment, deux polygones semblables doivent se contenir comme les triangles semblables dont ils sont composés, c'est-à-dire comme les quarrés numériques de deux côtés correspondans ou de deux diagonales correspondantes (111).

Il s'ensuit qu'*un polygone qui a pour un de ses côtés, l'hypothénuse d'un triangle rectangle, vaut la somme des deux polygones semblables à lui dont les côtés correspondans sont ceux de l'angle droit.*

Ce principe est applicable aux cercles, car ces figures peuvent être considérées comme des polygones réguliers d'un très grand nombre de fort petits côtés. En effet, plus un polygone régulier a de côtés et moins il diffère du cercle auquel il est inscrit (141); de sorte que le nombre des côtés devenant très-grand, il est impossible à l'œil de distinguer le cercle du polygone.

Si donc les droites DE, DF, EG (P. II, F. 49) sont prises égales à des côtés correspondans de polygones semblables, réguliers ou non, FG sera le côté correspondant d'un polygone qui, fait semblable aux polygones donnés, vaudra leur somme ; et dans le cas où DE, DF, EG seraient égales aux rayons ou aux diamètres de différens cercles, FG donnerait le rayon ou le diamètre d'un cercle dont la superficie vaudrait la somme de celles des cercles

donnés. Ainsi, vous pouvez doubler, tripler, etc., un polygone et un cercle, tout aussi aisément qu'un carré (154).

Réduire ou étendre un polygone.

L'opération revient à diviser le polygone en triangles par des diagonales et à copier ces triangles en petit ou en grand (111). Supposons que vous ayez à réduire au seizième, un plan (P. II, F. 38) qui présente un polygone ABCDE formé par un clocher A, une croix B, un arbre C, l'intersection D de deux chemins, et un moulin E. Vous prendrez le quart du côté AB, du côté BC et de la diagonale AC, au moyen d'un angle de réduction (68); vous porterez le quart de AB sur une droite, de *a* en *b*; de *a*, avec le quart de AC pour rayon, vous décrirez un petit arc; de *b*, avec le quart de BC pour rayon, vous décrirez un autre petit arc qui coupe le premier en *c*; et le triangle *abc*, sera la copie au seizième du triangle ABC (111). Ensuite, vous ferez de la même manière, sur *ac*, la copie du triangle ACD, au moyen du quart de AD et du quart de CD, puis sur *ad*, la copie de ADE; vous obtiendrez ainsi le polygone *abcde* qui sera l'image exacte de ABCDE et dont la superficie contiendra la seizième partie de celle du grand polygone, étant composé de trois triangles égaux chacun au seizième du grand triangle correspondant.

Pour achever la copie du plan, il vous restera à dessiner entre *a* et *d*, le chemin AD; entre *d* et *e*, le chemin DE; entre *a* et *e*, la rivière AE. On trace à vue ces lignes du plan, en les dirigeant par rapport à *ad*, *de*, *ac*, à-peu-près comme elles sont placées par rapport à AD, DE, AE.

Cette application vous enseigne aussi comment il faut opérer pour *faire un polygone qui soit semblable à un polygone quelconque et donné.*

Lever des plans.

153. Il vous serait maintenant facile, en réfléchissant à tout ce que vous avez appris sur les polygones semblables, de découvrir vous-mêmes les procédés à employer pour *faire ou lever le plan d'un terrain quelconque*, car ce plan n'est autre chose que la copie réduite du polygone ou des polygones dont le terrain est entouré ou couvert. Nous allons néanmoins appliquer les principes à un des cas les plus compliqués, afin d'avoir l'occasion de vous

faire connaître quelques moyens qui facilitent l'opération et la rendent plus exacte. Supposons donc que vous ayez à lever le plan de toute une commune, d'un terrain occupé par un village, des champs, des haies, des bois, des chemins et un ruisseau ou une rivière.

Croquis. Vous ferez d'abord le *croquis*, c'est-à-dire le dessin à vue de tout le terrain (P. IV, F. 8), et vous y placerez les objets, aussi exactement que vous le pourrez, dans les positions qu'ils occupent réellement les uns par rapport aux autres. Ce croquis doit être fait sur une page d'un grand cahier, afin qu'on puisse l'exécuter aisément, en tenant le papier d'une main. Vous y tracerez d'abord le polygone *abcdefghi* que forment les points remarquables situés aux limites ou près des limites du terrain, puis successivement les quadrilatères et les triangles qui remplissent l'intérieur de ce polygone, en allant toujours des plus grands aux plus petits. On éprouve d'abord quelque peine à faire d'une manière un peu nette, un semblable dessin; mais on y parvient bientôt. D'ailleurs, il n'est pas indispensable qu'il soit bien dessiné; on ne s'en sert que pour inscrire les mesures, ce qu'on appelle *coter*, et pour écrire les noms des parties du terrain.

Mesurages. Après avoir terminé le croquis, vous commencerez les mesurages *horizontaux*, à la chaîne (72), par celui d'un côté *ab* du grand polygone, ayant soin de prendre les distances du point *a* aux points où des alignemens importans viennent rencontrer ce côté. Ainsi, vous coterez *ak*, pour marquer l'intersection *k* de *ab* et de l'alignement d'une partie droite de la rivière; puis vous mesurerez et vous coterez *kb*. Mesurez ensuite, *kl*, *lm*, distance donnée par un autre alignement *bm* du bord de la rivière, puis le reste *ma* du chemin *la*. Vous aurez tout ce qu'il faut pour construire, plus tard, à l'échelle, le triangle *abl*, les deux triangles qu'il renferme et la partie *bl* du cours de la rivière. L'arrondissement se fait à vue; mais vous pouvez aussi prendre la distance du coude au point où se coupent *bm* et *kl*.

Mesurez la largeur de la rivière, soit au point *l*, soit ailleurs, si elle est à-peu-près la même partout. Dans le cas contraire, on la mesure à tous les points où elle varie sensiblement, et il en est de même des chemins de voiture, si l'échelle permet de tenir compte de leur largeur. Quant aux sentiers qui se représentent par deux

traits fort rapprochés et quelquefois par un seul, il est inutile d'en prendre la largeur. Les cotes de largeur s'inscrivent comme celles que vous voyez au chemin *Le*, sur la grande base d'un trapèze, quand la petite n'est pas suffisamment longue.

Mesurez *li* et *ia*,, pour avoir les trois côtés du triangle *ali* et pouvoir placer le point *i* du bois. L'embranchement des deux chemins se fait à vue, ainsi que la partie du chemin qui va de *i* au cadre. Pour l'ordinaire, on ne détermine rigoureusement que les points situés sur le contour du grand polygone ou dans l'intérieur ; voilà pourquoi il est prescrit de prendre ce polygone de manière à renfermer tout le terrain dont on veut le plan exact.

Mesurez la largeur du pont et cotez-la, comme celle du chemin *Le* ; mesurez ensuite *ip* donnée par l'alignement *lp* tangent à la rivière ; mesurez aussi *pl*, *ph*, *ho*, *hn*, *on* et *oi*. Vous pourrez faire le renfoncement du bois, quoique *in* ne soit pas mesurable, et le triangle *ilh*, bien qu'on ne puisse cheminer selon *lh*.

Remarquez qu'en parcourant ainsi le terrain pour mesurer, vous trouvez les moyens de corriger les erreurs du croquis. Si, par exemple, l'alignement *lh* ne passe pas en réalité par la rencontre *q* de la rivière et de la haie *tq*, vous changez convenablement la direction de cette haie.

Mesurez *lr* et *rh*, en prenant les distances *rs*, *st* ; prenez aussi *tq*. Si la rivière est trop large pour que *th* soit mesuré à la chaîne, vous emploierez le procédé du n° 74.

Mesurez *tu*,*uh*,*uv*,*vx*,*vy*,*uy*,*ty*,*yz*,*za'*,*a'y*,*a't*, et continuez de décomposer ainsi en triangles, les diverses figures du terrain, observant toujours de mesurer les moindres rampes horizontalement et d'employer pour former tout nouveau triangle, un côté de triangle déjà connu. La figure montre au reste comment doit être faite la décomposition, et quelles sont les intersections d'alignemens qu'il faut coter.

Les maisons se figurent par masses, et les angles saillans ou rentrant de ces masses sont faits droits, à moins qu'ils ne soient très-sensiblement aigus ou obtus. Dans ces derniers cas, on prolonge leurs côtés pour former un triangle symétrique A, tout-à-fait égal à celui qu'il faudrait faire à l'intérieur, pour lever l'angle du bâtiment par le procédé du n° 102, et quand on met le plan au net, on copie ce triangle à l'envers. Observez toutefois que vous pouvez vous dispenser de ces opérations, en cotant les points

où les alignemens des murs vont rencontrer chacun les deux haies du jardin.

Les mêmes moyens servent à lever le contour d'un bois ou d'une vigne et en général de toute figure dont on ne peut mesurer les diagonales. Ainsi, la largeur de la route et sa direction BC déterminée par les triangles, feront connaître les points D, E, *d*; le point *c* sera marqué sur l'alignement B*b*, à la distance B*c* de B; le point F de l'alignement GE sera aisément connu; vous pourrez donc tracer les chemins droits D*c*, EG. De même, les points H, *g* détermineront le sentier *gf*; vous aurez le point *f*, par la distance I*f*; vous pourrez donc marquer le point K où la direction *df* est rencontrée par le sentier L*e*, et tracer ce chemin dont vous connaîtrez déjà le point L. Le point *e* sera fourni par la distance K*e*. Ainsi, vous serez en état de dessiner les contours et les divisions du terrain couvert de vignes, sans avoir mesuré une seule de ses diagonales.

Au reste, le lever réel d'une petite partie des alentours d'un village, achevera de vous faire comprendre toute cette manière d'opérer, et vous trouverez de vous-mêmes, en y pensant un peu, les moyens de vous tirer des cas extraordinaires qui pourront se présenter. Mais il convient de copier auparavant la figure 8, en doublant les côtés des triangles et procédant de proche en proche, à partir du côté *ab*, comme il a été prescrit ci-dessus. Cet exercice vous fera bien voir le but de toutes les opérations et vous rendra capables de les appliquer sur le terrain.

Orientation. Il en est une dont nous n'avons pas encore parlé; c'est celle qu'il faut faire pour *orienter le plan*, c'est-à-dire, pour y marquer les quatre points cardinaux : nord, sud, est, ouest. Plantez verticalement un jalon en un point M de l'alignement *ab*, par exemple; marquez sur le sol l'extrémité de l'ombre de ce jalon, vers 10^h du matin, et avec la longueur de cette ombre, décrivez un arc d'environ 180° dont M soit le centre. De 10^h à midi, l'ombre diminuera et quittera la circonférence; mais son extrémité y reviendra après midi, vers 2^h. Marquez le point où se trouvera cette extrémité à ce moment, et divisez en deux parties égales, l'arc PQ qui séparera les deux positions extrêmes de l'ombre (65). La droite de division MN sera dirigée du sud au nord; vous pourrez la tracer sur le plan, si vous mesurez M*b*, N*b*, MN; une ligne droite perpendiculaire à celle-là indiquera l'est à droite et l'ouest à gauche.

Conventions. Quelques mots maintenant sur les conventions faites pour représenter, dans le dessin au net, les diverses parties du terrain et les objets qui s'y trouvent. Les champs restent en blanc. Les bois se font comme vous le voyez en O. De petits ronds dentelés représentent des arbres isolés : vous en trouvez de tels sur le bord de la rivière, vers le point *b*. Une ligne droite dentelée par de petits zéros, figure une haie. Les masses des maisons sont couvertes de traits fins qu'on trace à la plume, sans règle, à peu près parallèlement ; on les appelle *hachures*. Une église a ses hachures parallèles à ses longs côtés ; tout autre bâtiment public est couvert de hachures croisées, comme le montre le rectangle situé à gauche de l'église : il contient, par exemple, le presbytère, la maison commune, l'école et le logis du pâtre. Les murs sont figurés par de simples traits plus gros que ceux des chemins. Une rivière un peu large est couverte de lignes courbes qui suivent les contours des bords ; celles du milieu sont plus écartées que les autres ; une flèche indique la direction du courant. Cette flèche mise près des bords, suffit pour distinguer un ruisseau d'un chemin courbe. La figure 1 (P. III) montre comment se fait une prairie ; la figure 2 montre une vigne ; la figure 3 montre un étang ; la figure 4 indique un marais ; la figure 5 indique un petit jardin ou un carreau de grand jardin, car lorsque les jardins sont grands, on doit en tracer les allées.

Nivellement. On a besoin, dans certain cas, de connaître les hauteurs relatives de différens points d'un terrain dont on lève le plan. Il peut être utile, par exemple, de savoir combien le point *h* de la rivière (P. IV, F. 8) s'élève au-dessus du point *b*, ou quelle est la pente totale de *h* en *b*. C'est au moyen d'un niveau d'eau que vous la trouverez (44). Placez cet instrument en un point quelconque d'où vous puissiez voir *b* et *h*; plantez verticalement un jalon en *b* et mesurez la distance de *b* au point *b'* où le jalon est rencontré par l'horizontale du niveau A (P. III, F. 6); vous aurez l'élévation *bb'* de l'horizontale au-dessus de *b*. Faites la même opération pour le point *h*; vous aurez l'élévation *hh'* de la même horizontale au-dessus de ce point, si le pied de l'instrument n'a pas varié. Retranchant donc la plus petite hauteur *hh'* de la grande *bb'*, vous connaîtrez, par la différence *bb''* ou *hh''*, de combien de mètres le point *h* est élevé au-dessus de *b*. Ce nombre de mètres est ce qu'on appèle la *cote verticale* du point *h*; celle de *b* est zéro.

Si vous opérez de la même manière entre *h* et *g* (P. IV, F. 8.), entre *g* et *f*, entre *f* et *d*, etc., vous trouverez les hauteurs relatives de tous ces points. Puis, pour avoir, par rapport à *b*, la cote verticale *bb'* de *g* (P. III, F. 7), point plus élevé que *h*, vous ajouterez à la cote *bb''* de *h*, la quantité *hh'* dont *g* est au-dessus de ce point; pour avoir la cote verticale *bb'''* de *f*, point moins élevé que *g*, vous retrancherez de la cote *bb'* de *g*, la quantité *ff'* dont *f* est au-dessous de ce point; etc.

Toute cote verticale indique donc de combien son point est élevé au-dessus du point *b* le plus bas de tous les points du plan, et il suffit évidemment de retrancher une cote verticale d'une autre, pour savoir de combien le point de la 1re cote est moins élevé que celui de la 2e.

Chercher ainsi les cotes verticales de plusieurs points, par rapport à un autre, choisi pour point de comparaison, c'est *faire un nivellement.*

Les cotes verticales s'inscrivent, sur le croquis, à côté des points auxquelles elles appartiennent, et entre parenthèses; sur le plan au net, on les écrit de la même manière, à l'encre rouge.

Il serait possible qu'on rencontrât un point *d* qui fût au-dessous du précédent *f* (P. IV, F. 8) d'une quantité plus grande que la cote de ce dernier; qu'il y eût, par exemple, 6^m de différence entre *f* et *d*, tandis que la cote de *f* serait 4^m. Dans ce cas, on retrancherait la cote 4^m de la différence d'élévation 6^m; le résultat 2^m serait la quantité dont *d* se trouverait au-dessous de *b* ou dont *b* se trouverait au-dessus de *d*. Ce serait *d* qui deviendrait le point de comparaison: 2^m serait la cote de *b*, et toutes les cotes verticales déjà trouvées devraient être augmentées de 2^m.

Il est possible aussi qu'entre deux points *d*, *c*, on ne puisse pas placer le niveau dans une *station* d'où *d* et *c* soient visibles. Il faut alors comparer *d* à un point quelconque G ou E, puis comparer G ou E à *c*. Un point qu'on prend ainsi pour intermédiaire, sans avoir besoin de sa cote, est dit *point de repère.*

Il est possible enfin que de deux points comparés, l'un A (P. III, F. 8) soit au-dessous de l'horizontale et l'autre B au-dessus. On doit alors, au lieu de retrancher, ajouter les distances AA', BB' des points à l'horizontale A'B', pour avoir la différence d'élévation BB''. Si les deux points se trouvaient à la fois au-dessus de l'horizontale,

il faudrait retrancher, comme dans le cas où ils sont tous deux au-dessous.

Mesurage des polygones.

154. Nous pourrions, à la rigueur, renvoyer pour le mesurage des polygones, à celui des triangles, puisqu'un polygone quelconque peut toujours se décomposer en triangles. Il est clair qu'en mesurant ces triangles et faisant la somme de toutes leurs superficies, on aurait celle du polygone. Mais il est des cas où un mesurage plus expéditif peut être employé, et il en est d'autres où la décomposition est impossible.

Mesurer un polygone régulier quelconque.

Cherchez le centre, par des perpendiculaires aux milieux de deux côtés (65); mesurez une de ces perpendiculaires, du centre A en E (P. II, F. 56); mesurez aussi un côté BF; calculez la superficie du triangle BAF dont vous connaissez la base et la hauteur (137), et multipliez cette superficie par le nombre des côtés du polygone régulier; vous aurez pour produit celle de tout ce polygone, puisqu'il renferme autant de triangles égaux à BAF qu'il a de côtés.

Soient P la superficie du polygone régulier, C le côté, R le rayon AE de la circonférence inscrite, et N le nombre des côtés; on a pour formule $P=\frac{C\times R\times N}{2}$.

S'il s'agit d'un hexagone régulier, que $AE=0^m,29$, et que $BF=0^m,34$, la formule donne $P=\frac{0^m,34\times 0^m,29\times 6}{2}=0^{mm},2958$.

Mais au lieu de procéder ainsi, vous pouvez bien multiplier le côté BF par 6, ce qui donne la somme des côtés ou le contour du polygone, puis multiplier le produit par la longueur de AE et diviser le résultat par 2; ce calcul fait trouver comme l'autre, $0^{mm},2958$ pour superficie. On peut donc dire que *la superficie d'un polygone régulier égale la moitié du produit de son contour multiplié par la perpendiculaire AE abaissée du centre sur un côté.*

155. Le cercle pouvant être considéré comme un polygone régulier (152), doit avoir le même mesurage que cette sorte de figure. Or, lorsque le polygone se confond avec le cercle dans lequel il est inscrit ou auquel il est circonscrit, le contour est la circonférence, et la

perpendiculaire au côté est le rayon du cercle. Par conséquent, la superficie d'un cercle égale la moitié du produit de la circonférence multipliée par le rayon.

Si le rayon est de 5^m, le diamètre sera $5^m \times 2$, la circonférence vaudra $5^m \times 2 \times 3,1416$ d'après le n° 19, et la superficie égalera $\frac{5^m \times 2 \times 3,1416 \times 5^m}{1 \quad 2}$. Mais, remarquez que le chiffre 2 multipliant et divisant, peut être supprimé, et qu'alors on a, pour la superficie du cercle, $5^m \times 3,1416 \times 5^m$. Remarquez encore que multiplier le rayon 5^m par 3,1416 et le produit par 5^m, revient à faire le quarré de ce rayon 5^m et à le multiplier par 3,1416. Nous pouvons donc dire enfin que *la superficie d'un cercle est égale au quarré numérique du rayon multiplié par le nombre* 3,1416. La formule abrégée de ce principe, est $S.C = R \times R \times 3,1416$, si S.C représente la superficie du cercle.

Pour un cercle dont le rayon serait de 3^m, on aurait, par la formule, $S.C = 9^{mm} \times 3,1416 = 28^{mm},2744$. Ce résultat n'est pas exact; il se trouve un peu trop grand; mais le produit $9^{mm} \times 3,1415 = 28^{mm},2735$ serait trop petit; de sorte que la véritable superficie d'un cercle de 3^m de rayon, est comprise entre $28^{mm},2735$ et $28^{mm},2744$. Au reste, elle diffère beaucoup moins du dernier de ces nombres que du premier, et en la supposant égale à $28^{mm},2744$, on ne fait pas une erreur d'un centimètre carré.

Il n'est pas rare de rencontrer des hommes qui cherchent les moyens d'obtenir exactement la superficie d'un cercle; chaque année même, plusieurs prétendent avoir trouvé ces moyens. Mais, malgré leurs efforts et ce qu'ils appellent leurs succès, le problême est encore à résoudre. N'essayez pas d'être plus heureux; vous perdriez votre temps et vos peines; car en supposant qu'on pût trouver la *quadrature* du cercle, c'est-à-dire la mesure exacte de la superficie, ce qui est bien loin d'être certain, la découverte serait fort peu utile, puisque nous possédons le moyen d'approcher de la vraie valeur de cette superficie, autant que nous pouvons le désirer.

Vous avez déjà vu effectivement qu'en multipliant le quarré 9 du rayon par 3,1416, vous ne faites pas erreur d'un centimètre carré; hé bien! si vous preniez pour multiplicateur le nombre 3,141593, vous n'auriez pas 4 millimètres carrés de trop, et si vous multipliiez le quarré du rayon par 3,141592653 59 vous ne vous tromperiez pas de 30 trillionièmes de mètre carré. Le résultat n'équivaudrait-

il pas à la vérité? Pouvons-nous mesurer un rectangle plus exactement, aussi exactement même? non, sans doute: l'imperfection de nos instrumens et de nos sens s'y oppose et s'y opposera toujours. Laissons donc la quadrature du cercle parmi ces puérilités dont ne doit jamais s'occuper l'homme qui connaît le prix du temps.

156. *Mesurer un secteur de cercle*, c'est-à-dire une partie comprise entre deux rayons AB, AC et l'arc BC qui les sépare (P. II, F. 56).

Calculez la superficie du cercle entier et divisez le résultat par le nombre de fois que l'arc BC est contenu dans la circonférence (20). Si l'arc est indiqué en degrés, vous trouverez ce nombre de fois, en divisant 360° par les degrés donnés.

Dans le cas où l'on connaîtrait la longueur de l'arc BC, il suffirait de multiplier cette longueur par celle du rayon, et de prendre la moitié du produit, puisque c'est ainsi qu'on agit pour le cercle entier (155).

157. *Mesurer un segment de cercle*, c'est-à-dire une partie comprise entre un arc BC et sa corde (P. II, F. 56).

Mesurez le secteur BAC de même arc, et retranchez de sa superficie, celle du triangle BAC formé par la corde et les deux rayons. Le reste sera évidemment la superficie du segment.

158. *Arpenter un terrain à limites droites et courbes, dans lequel on peut opérer.*

Faites à vue un croquis ABCDEFGHIKLM (P. III, F. 9) qui représente grossièrement le polygone formé par le terrain, et si vous êtes dépourvu d'équerre d'arpenteur, tracez sur ce croquis les diagonales MB, BL, LC, CK, KD, DI, IE, EH; tracez aussi, tant sur le terrain que sur le papier, les alignemens EN, NO, OP, PF, de manière que chacun coupant la limite sinueuse EF, augmente d'un côté la superficie, à-peu-près autant qu'il la diminue de l'autre; tracez enfin sur le croquis les diagonales HN, NG, GO, OF. Cela fait, vous mesurerez les trois côtés de chaque triangle en décimètres, par exemple; vous inscrirez les longueurs sur les droites correspondantes du croquis; vous calculerez les superficies de tous ces triangles, par le moyen du n° 138; vous ferez la somme des résultats, et vous modifierez cette somme conformément à ce qu'enseigne le n° 127, pour qu'elle exprime des hectares.

Si vous avez une équerre d'arpenteur, prenez pour *base d'opération*, la plus grande diagonale AF du polygone (F. 10); figurez sur le croquis, cette diagonale et des perpendiculaires abaissées de tous les sommets sur AF. Plantez un jalon au point B du terrain et cherchez le pied *b* de la perpendiculaire B*b* (42); mesurez la hauteur A*b* et la base B*b* du triangle rectangle A*b*B; inscrivez ces distances le long des droites correspondantes du croquis, en observant de placer la cote de A*b* au-dessus de cette ligne.

Maintenant, il faut remplacer l'équerre par un jalon mis en *b*, porter en C le jalon B, chercher le pied *c* de la perpendiculaire C*c*, mesurer *bc*, *c*C, et inscrire ces longueurs sur le croquis, observant de placer au-dessus de *bc*, la cote de cette hauteur du trapèze B*bc*C.

Le jalon *b* doit alors être mis en *c* et le jalon C en D, afin que vous puissiez marquer le pied de la perpendiculaire D*d* et mesurer *cd*, *d*D. Vous inscrirez ces longueurs comme les précédentes, et vous agirez de même au point *e*.

Ensuite, vous mesurerez *e*F, vous diviserez son nombre de décimètres en parties égales, assez petites pour que quelques-unes des parties correspondantes de la sinuosité EF, puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites. Supposons que vous partagiez *e*F en 5 parties de 525 centimètres chacune. Vous porterez une de ces parties de *e* en *n*, sur le terrain, et vous mesurerez la longueur de la perpendiculaire *n*N, que vous éleverez sur AF. Vous porterez la longueur *en*, de *n* en *o*, et vous marquerez sur la perpendiculaire oO, un point O tel que l'alignement ON augmente d'un côté la superficie, à-peu-près autant qu'il la diminue de l'autre; puis vous mesurerez oO. Vous porterez *no* de *o* en *p*; vous marquerez par un jalon, sur la perpendiculaire *p*P, un point P, comme vous avez marqué le point O, et vous mesurerez *p*P. Enfin, vous porterez o*p* de *p* en *q*; vous marquerez Q comme P et O, puis vous mesurerez *q*Q′ et *q*Q.

Retournant maintenant de F vers A, vous devrez opérer pour la partie FGHIKLMA du polygone, comme vous avez opéré pour la partie située au-dessus de la base AF. Ainsi, vous mesurerez F*g* et la perpendiculaire *g*G, puis successivement *gh*, *h*H, *hi*, *i*I, *ik*, *k*K, *k*R, RS, *l*L, SA et *m*M. Vous connaîtrez alors toutes les longueurs qui doivent servir au mesurage du polygone ou des triangles et des trapèzes dont il se compose. Ayant calculé les super-

ficies de toutes ces figures, vous devrez en faire la somme, toutefois sans y comprendre la superficie du triangle RLS, qui ne fait point partie de celle du terrain à arpenter; ce triangle doit être au contraire retranché de la somme des autres figures, attendu qu'on l'a compris dans le trapèze B*b*c*c*C.

Il n'est pas nécessaire de faire plusieurs multiplications, pour calculer la superficie de la partie *e*E*Qq*; une seule suffit. Remarquez en effet que cette partie du terrain égale *e*E*Nn*+*n*N*Oo*+*o*O*Pp*+*p*P*Qq*, que chacun de ces trapèzes vaut la demi-somme de ses bases multipliée par la hauteur *en* commune à tous (159), et qu'au lieu de calculer chaque trapèze séparément, on peut fort bien additionner les demi-sommes de bases et multiplier le total par la hauteur commune *en*. Or, ce total se composera évidemment de $(\frac{1}{2}e\mathrm{E}+\frac{1}{2}n\mathrm{N})+(\frac{1}{2}n\mathrm{N}+\frac{1}{2}o\mathrm{O})+(\frac{1}{2}o\mathrm{O}+\frac{1}{2}p\mathrm{P})+(\frac{1}{2}p\mathrm{P}+\frac{1}{2}q\mathrm{Q})$, ce qui revient à $\frac{1}{2}e\mathrm{E}+n\mathrm{N}+o\mathrm{O}+p\mathrm{P}+\frac{1}{2}q\mathrm{Q}$. Par conséquent, vous obtiendrez la superficie de la figure *e*E*Qq*, en additionnant les longueurs $\frac{1}{2}e\mathrm{E}$, *n*N, *o*O, *p*P, $\frac{1}{2}q\mathrm{Q}$ et multipliant leur somme par *en* une des parties égales de *e*F. De là ce principe: *Pour mesurer l'ensemble d'une suite de trapèzes qui ont tous même hauteur et deux à deux une base commune, il faut faire la somme des bases communes, y ajouter les moitiés des bases extrêmes, et multiplier le total par la hauteur d'un trapèze.*

159. *Arpenter un terrain limité par une courbe, dans lequel on peut opérer.*

Après avoir tiré AB, une des plus grandes cordes de la courbe (P. III, F. 11), vous la diviserez en parties égales et assez petites pour que les parties correspondantes de la limite puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites. Vous mesurerez ensuite les cordes tracées perpendiculairement à AB, par tous les points de division. La superficie comprise entre les deux parallèles extrêmes CD, EF pourra être mesurée au moyen du principe précédent, et il n'y aura plus qu'à y ajouter les deux triangles ACD, BEF, pour avoir la totalité du terrain. Or ACD égale le produit de la moitié de CD par AG; BEF égale le produit de la moitié de EF par BH; les hauteurs AG, BH de ces triangles sont aussi les hauteurs des trapèzes intermédiaires, et les produits des moitiés de CD, EF par la hauteur commune, en-

trent déjà dans le calcul de la superficie CDFE. Par conséquent, vous aurez à fort peu près la superficie totale ACEBFDA, en multipliant la somme de toutes les cordes parallèles par l'écartement de deux cordes voisines.

Il s'ensuit ce principe : *Lorsque dans une suite de trapèzes terminée par deux triangles, les figures ont toutes même hauteur et deux à deux une base commune, on obtient la superficie totale en multipliant la somme des bases par une seule hauteur.*

Si le terrain finissait d'un côté par un trapèze et de l'autre par un triangle, il est clair que dans la somme des bases devrait entrer entièrement la base du triangle et seulement la moitié de l'autre parallèle extrême.

Au lieu de former deux pointes, comme dans la figure 11, le terrain peut être arrondi aux deux bouts, comme dans la figure 12. Il faudrait alors partager AB en parties forts petites, pour que tous les arcs de la courbe pussent être regardés, sans grande erreur, comme des droites. Afin d'abréger le mesurage, vous tracerez, dans ce cas, deux perpendiculaires FH, IK qui retranchent les parties les plus arrondies des bouts ; vous diviserez leur écartement CD en parties égales, d'une grandeur convenable, pour tracer d'autres perpendiculaires, comme précédemment, et vous formerez à vue 4 petits triangles, tels que EFG, qui soient sensiblement équivalens aux parties retranchées telles que ACG. La superficie FENIKOPHF calculée selon la règle du n° 158, différera peu de celle du terrain limité par la courbe AENBOPA.

Il convient de vous faire observer, en terminant cet article, qu'on peut éviter le partage en parties égales de eF (P. III, F. 10), de AB (F. 11), de CD (F. 12.) Pour cela, on porte à partir de C, par exemple (F. 12), une longueur arbitraire CL un certain nombre de fois, 4 je suppose, ce qui fait arriver au point M. On opère ensuite comme il a été dit, pour la partie de la figure comprise entre les parallèles FH, NO, puis on mesure à part les trapèzes ou les triangles des extrémités dont les hauteurs MD, AC sont moindres que CL, et ces superficies sont ajoutées à celle qui est déjà calculée.

160. *Arpenter un terrain quelconque dans lequel on ne peut opérer*, un bois, une vigne, un étang, par exemple.

Pour faire ce mesurage sans équerre d'arpenteur, il faut prolonger trois côtés du polygone, de manière à

former un triangle ABC qui embrasse tout le terrain (P. III, F. 13). Ce triangle doit n'avoir aucun de ses sommets sur ceux de la figure donnée, afin que ses côtés étant moins longs, soient plus faciles à mesurer. Appliquant le calcul du n° 138, on détermine la superficie de ABC, et celles des petits triangles ADE, BFG, CHI; puis, après avoir fait la somme de ces trois dernières, on la retranche de ABC. Le reste est évidemment la superficie du terrain DEFGHI.

Avez-vous une équerre d'arpenteur? marquez par des jalons, les pieds A, B (F. 14) des perpendiculaires à un côté DI, qui passent par deux sommets E, H; marquez aussi le pied C de la perpendiculaire abaissée de G sur l'alignement BH (42); plantez enfin un 4e jalon à la rencontre K des alignemens AE, CG. Vous aurez alors un rectangle ABCK qui renfermera le polygone donné et dont vous calculerez aisément la superficie (127). La moitié du produit AD×AE vous donnera celle du triangle DAE; la moitié du produit BI×BH sera celle de IBH; la moitié du produit CH×CG sera celle de HCG. Abaissant la perpendiculaire FL, vous formerez un 4e triangle extérieur FLG et un trapèze EKLF que vous mesurerez aisément aussi; faisant enfin la somme des 4 triangles extérieurs et du trapèze, puis retranchant cette somme de la superficie du rectangle, vous obtiendrez évidemment pour reste celle du terrain DEFGHI.

161. *Arpenter un terrain en pente.*

La vraie superficie d'un terrain en pente ou d'un polygone situé sur un plan incliné, s'obtient comme celle d'une figure dont le plan est horizontal. Mais, sous le rapport des produits agricoles, on doit ne chercher que la superficie du polygone horizontal qui se trouverait compris entre les mêmes plans verticaux que le polygone incliné; car, si d'un côté les plantes basses peuvent s'étaler plus amplement sur ce dernier, d'un autre les plantes à tiges ou à racines pivotantes n'y viennent pas en plus grand nombre, et le sol y est toujours moins fertile que dans un champ de niveau, attendu que les grandes pluies le dépouillent peu-à-peu de la bonne terre.

Pour obtenir la superficie horizontale d'un terrain en pente, il suffit de mesurer horizontalement les droites dont la longueur est nécessaire au calcul des triangles et des trapèzes qui composent le polygogne donné. On agit

à cet effet conformément au n° 72, en suivant la marche prescrite dans les trois derniers articles.

Remarquez que si vous calculez la superficie d'un terrain au moyen de la figure qu'il a sur un dessin, c'est toujours la superficie horizontale que vous trouvez, puisque les cotes des longueurs, inscrites au croquis, expriment des distances horizontales (153). Lorsqu'on se sert ainsi d'un plan dont l'échelle est, par exemple, de 1 millimètre pour mètre, le calcul donne les superficies en millimètres carrés, mais il faut regarder le résultat comme exprimant des mètres carrés (69.)

162. *Partager un terrain en plusieurs portions équivalentes.*

Soit, par exemple, le polygone quelconque ABCDE à partager en 4 quadrilatères équivalens (P. III, F. 15). Vous mesurerez d'abord ce polygone. Supposons que vous trouviez $667^{mm},87$. Chaque quadrilatère devra contenir le quart de ce nombre de mètres carrés, ou $166^{mm},97$. Divisez cette superficie par la longueur $22^{m},50$ de AF perpendiculaire sur CB; le quotient $7^{m},42$ sera la base d'un triangle égal à la moitié de $166^{mm},97$, car cette base multipliée par AF donnerait $166^{mm},97$ dont il faudrait prendre la moitié pour avoir la superficie du triangle (137). Portez donc $7^{m},42$ de B en G; le triangle BAG sera la moitié d'un des quadrilatères cherchés. Pour trouver l'autre moitié, vous diviserez $166^{mm},97$ par 25^{m}, longueur de GH perpendiculaire sur AE; vous porterez le quotient $6^{m},68$ de A en I, et vous tirerez GI. Le triangle AGI dont la superficie sera la moitié de $25^{m} \times 6^{m},68$, vaudra la moitié de $166^{m},97$; et par conséquent, le quadrilatère ABGI sera le premier quart du polygone.

Si maintenant vous portez AI de I en K, le triangle IGK qui aura aussi GH pour hauteur, vaudra AGI ou la moitié de $166^{mm},97$. Pour déterminer un autre triangle équivalent ou pour achever le deuxième quart du polygone, vous diviserez $166^{mm},97$ par $26^{m},75$ longueur de KL perpendiculaire sur BC; vous porterez de G en M, le quotient $6^{m},25$ et vous joindrez les points K, M. Le quadrilatère IGMK sera la seconde des portions demandées.

Vous pourriez former la troisième de la même manière; mais il serait à craindre qu'elle eût 5 côtés et que la dernière fût triangulaire. Pour être certain d'obtenir encore deux quadrilatères, vous calculerez le triangle KDE, au

moyen de sa base KE=6^{m} et de sa hauteur DN=12^{m}. Retranchant de 166^{mm},97 la superficie 36^{mm} de KDE, vous trouverez 130^{mm},97 pour celle du triangle qui ajouté à KDE formera le troisième quadrilatère. Si donc vous divisez 130^{mm},97 par 7^{m} moitié de la perpendiculaire DO, le quotient 18^{m},71 sera la base KP du nouveau triangle KDP ; le quadrilatère KEDP donnera le 3e quart du polygone, et le quadrilatère restant DCMP en sera la 4e portion.

Il pourrait arriver que le triangle KDE eût une superficie plus grande que le quart du polygone donné. Alors et s'il vous était indifférent d'avoir, pour une des parts, un triangle ou un quadrilatère, vous retrancheriez 166^{mm},97 de la superficie de KDE; le reste serait celle d'un triangle à ôter de KDE. Pour en connaître la base, vous diviseriez ce reste par la moitié de DN ; puis vous porteriez le quotient de K en R, par exemple. Le triangle RDE serait la 3e portion et le pentagone KRDCM serait la 4e. Mais s'il fallait absolument qu'aucune des parts ne fût triangulaire, vous feriez sur tout autre triangle KEM, KCM, etc., ce qui a été fait en premier lieu sur KDE.

Il serait possible aussi qu'une des limites du polygone fût sinueuse. Vous la décomposeriez en petites parties qui pussent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites, et vous agiriez sur le nouveau polygone, comme dans l'exemple précédent, formant toujours des triangles dont l'ensemble produisît une des portions. Bien entendu que, dans ce cas, deux, trois, etc., des petites parties de la limite sinueuse compteraient pour un seul côté de quadrilatère; de sorte que les parts de terrain seraient censées avoir cette figure, quoiqu'elles fussent réellement des pentagones, des hexagones, etc.

Partager un polygone en trois parties, par exemple, qui en soit l'une le $\frac{1}{3}$, l'autre le $\frac{1}{4}$ et la troisième les $\frac{5}{12}$.

L'opération revient encore au partage en portions équivalentes ; car les fractions données, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$; leur somme doit faire et fait effectivement $\frac{12}{12}$ ou 1 ; et si l'on partage le polygone en 12 parties de même superficie, la réunion des quatre premières de ces parties donnera les $\frac{4}{12}$ ou le $\frac{1}{3}$ du tout, l'ensemble des 3 parties suivantes formera les $\frac{3}{12}$ ou le $\frac{1}{4}$, et le reste se trouvera composé de 5 parties ou de $\frac{5}{12}$.

Cet exemple suffit pour montrer comment il faut *partager un polygone en parties exprimées par des fractions inégales dont la somme est l'unité.*

163. Comme la forme du trapèze est assez souvent celle des champs, il convient de vous enseigner les procédés particuliers qu'on peut suivre pour partager de semblables terrains.

Partager un trapèze ABCD en un nombre quelconque de trapèzes équivalens, par des droites qui coupent les bases (P. III, F. 16).

Supposons qu'on veuille 3 portions de même superficie. Vous diviserez chaque base en 3 parties égales, et vous joindrez les points de division correspondans. Les trapèzes AEFD, EFHG, GHCB renfermeront effectivement la même superficie, puisqu'ils auront même hauteur et que les bases de chacun seront égales aux bases correspondantes de tout autre (139).

Partager un trapèze ABCD en un nombre quelconque de trapèzes équivalens, par des droites parallèles aux bases (P. III, F. 17).

Voulez-vous d'abord partager le trapèze ABCD en deux portions de même superficie? vous raisonnerez comme il suit : Si EF parallèle aux bases était la ligne de division, ABEF serait la moitié de la différence des deux triangles GCD,GBA, et le triangle GEF vaudrait le petit triangle GBA, plus la moitié de cette différence. Or, la somme d'un nombre tel que 7 et de la demi-différence de ce nombre à un autre tel que 11, c'est la même chose que la moitié de 7, plus la moitié de 7, plus la demi-différence de 7 à 11, ou la même chose que la moitié de 7, plus la moitié de 11, ou la même chose que la demi-somme des deux nombres ; en chiffres, $7+\frac{11-7}{2}=7+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}+\frac{11}{2}=\frac{7+11}{2}$. Le triangle GEF serait donc la demi-somme des triangles GCD,GBA ; et comme ce sont des triangles semblables, le quarré du côté GE vaudrait la demi-somme des quarrés des côtés correspondans GC,GB (111).

Par conséquent, pour opérer le partage, prolongez les côtés DA,CB, jusqu'à ce qu'ils se coupent en G; mesurez GB, GC ou GA, GD; faites la somme des quarrés numériques de ces deux longueurs; puis extrayez la racine de la moitié de cette somme. Le résultat sera la distance de G au point E, par lequel il faudra mener une parallèle EF aux bases, pour que le trapèze ABEF ait la même superficie que le trapèze EFDC.

S'agit-il de partager le trapèze ABCD en trois portions équivalentes? on double le quarré numérique de GB, on ajoute le produit au quarré de GC, et l'on extrait la

racine du tiers de la somme, pour avoir la distance de G au point H, par lequel doit être menée la première parallèle aux bases. On trouve ensuite le point I de la deuxième, par l'opération précédente faite sur le trapèze HCDK.

S'il fallait former 4 portions équivalentes dans le trapèze ABCD, vous tripleriez le quarré numérique de GB, vous l'ajouteriez au quarré de GC, et vous extrairiez la racine du quart de la somme, pour connaître le point de la première parallèle. Les points des deux autres s'obtiendraient comme dans le cas précédent.

Vous voyez donc que le nombre par lequel il faut multiplier le quarré de GB, est le nombre des portions moins 1; et que c'est par ce nombre même des portions qu'on doit diviser la somme du produit et du quarré de GC, avant de faire l'extraction.

DESSIN DES CORPS.

164. Nous voici arrivés à l'étude des *faces courbes*. La première chose à faire, c'est d'apprendre à les représenter exactement sur le papier ou, ce qui revient au même, à dessiner les corps de manière qu'au moyen d'une échelle, on puisse en trouver les véritables dimensions.

Pour que le dessin d'un corps en donne exactement les dimensions, il doit se composer de deux parties: *le plan* et *l'élévation*.

Le plan d'un corps est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points du corps, sur un plan horizontal: en général, ces points sont unis sur le plan, par des droites ou des courbes, selon qu'ils le sont dans le corps par des droites ou des courbes.

Placez votre équerre de façon que ses faces triangulaires soient horizontales, et placez des fils-à-plomb aux trois sommets. Ces fils marqueront trois points sur un plan horizontal situé au-dessous de l'équerre, à une distance quelconque. Unissez ces points par trois droites, vous aurez un triangle parfaitement égal aux faces triangulaires de l'équerre. En effet, les fils-à-plomb sont parallèles, et les droites horizontales qu'ils comprennent entre eux sont égales, puisqu'elles sont aussi parallèles (66); par conséquent, le côtés du triangle fait sur le plan horizontal, sont égaux aux côtés correspondans des faces triangulaires de l'équerre, et il s'ensuit que ce triangle égale chaque face (106). Un

tel triangle est le plan de l'équerre ; il en fait connaître toutes les dimensions, l'épaisseur exceptée.

Il est clair, d'après cela, qu'une pièce de bois coupée d'équerre, dont les deux bouts seraient des carrés et qui se trouverait placée verticalement, aurait un carré pour son plan ; les côtés de ce carré donneraient la largeur et l'épaisseur de la pièce ; la longueur serait la seule dimension que vous ne pourriez prendre sur le plan.

Si une des longues faces de la même pièce était horizontale, le plan serait un rectangle précisément égal à cette face et à la face opposée ; il ferait connaître la longueur et la largeur de la pièce, mais il ne donnerait pas l'épaisseur.

Observez que les perpendiculaires qui vont des points d'un corps, aux points correspondans de son plan, donnent les distances des points de ce corps au plan horizontal sur lequel il est dessiné.

En géométrie, le plan d'un corps en est la *projection horizontale ;* les perpendiculaires qui le déterminent sont appelées *lignes projetantes ;* mais on peut, sans inconvénient, se dispenser d'employer ces noms.

165. *L'élévation d'un corps n'est autre chose que son plan fait sur un plan vertical.* Il faut donc, pour la déterminer, abaisser des divers points du corps, des perpendiculaires sur un plan vertical, et généralement joindre les pieds de ces perpendiculaires par des droites ou des courbes, selon que les points correspondans sont joints par des droites ou des courbes.

Notez bien que la position du corps pendant qu'on fait son élévation, doit être absolument la même que celle qu'il avait pendant la construction du plan : le plan et l'élévation sont deux dessins inséparables qui se rapportent à une seule position du corps.

Lors donc qu'une équerre est horizontale et que son plan est un triangle égal à celui de ses grandes faces, son élévation est un rectangle dont les grands côtés sont horizontaux et dont les petits côtés sont des verticales égales à l'épaisseur.

La pièce de bois verticale que nous avons vue avoir un carré pour plan, a pour élévation un rectangle dont les grands côtés sont verticaux et d'une longueur égale à celle de cette pièce.

Quand la même pièce, placée horizontalement, a pour

plan un rectangle, son élévation est un carré, si les longues arêtes sont perpendiculaires au plan vertical, et les côtés de ce carré donnent l'épaisseur.

Vous voyez par là, que l'élévation peut faire connaître la dimension que ne fournit point le plan.

L'élévation d'un corps est aussi appelée *projection verticale;* les perpendiculaires qu'on abaisse sur le plan vertical pour la déterminer, sont dites *lignes projetantes,* comme les verticales qui déterminent le plan. Il est visible au reste que ces perpendiculaires sont des horizontales, et que leurs longueurs égalent les distances des points du corps, au plan vertical sur lequel l'élévation est dessinée.

Le plan horizontal qui contient le plan d'un objet, et le plan vertical qui en renferme l'élévation, sont souvent appelés *plans de projections*..

166. Afin de pouvoir faire sur une même feuille de papier, le plan et l'élévation d'un corps, on y trace parallèlement au bord inférieur ou supérieur, une droite un peu forte, comme les lignes de résultat. Cette droite, nommée *ligne de terre,* est censée l'intersection d'un plan horizontal et d'un plan vertical; on suppose que la partie du papier située au-dessous, est le plan horizontal du terrain, et que la partie située au-dessus, est un plan vertical, celui d'un mur par exemple. Il faut s'habituer à considérer la feuille comme si elle était pliée selon la ligne de terre, de manière que la partie inférieure fût horizontale, et la partie supérieure, verticale.

167. *Construire le plan et l'élévation d'une équerre dont les grandes faces sont horizontales et dont l'un des petits côtés est parallèle au plan vertical.* On suppose que ce petit côté est éloigné de $0^m,1$ du plan vertical, que la face inférieure de l'équerre se trouve à $0^m,2$ du plan horizontal, que l'épaisseur est de $0^m,02$, que le côté parallèle au plan vertical a $0^m,4$, que l'autre petit côté a $0^m,3$ et que l'échelle est au dixième.

Elevez en un point quelconque A de la ligne de terre YZ (P. III, F. 18), une perpendiculaire AB; portez $0^m,04$ de A en C, et par le point C, menez une parallèle à AB; prenez AD et CE de $0^m,01$, puis tirez DE; prenez DF de $0^m,03$, puis tirez FE. Le triangle EDF sera le plan de l'équerre, car le côté DE de ce plan doit être parallèle à la ligne de terre, comme le côté correspondant de l'équerre (46), et autant éloigné de cette droite, que le côté l'est du plan vertical.

Maintenant, portez $0^m,02$ de A en G et de C en H, puis $0^m,002$ de G en I et de H en K. Les droites GH, IK achèveront le rectangle qui doit former l'élévation de l'équerre (165); car il faut évidemment que le côté GH de ce rectangle soit éloigné de la ligne de terre, autant que la face inférieure du corps est éloignée du plan horizontal.

Vous voyez par là que sur le dessin complet d'un corps, les distances au plan vertical sont les perpendiculaires à la ligne de terre, tracées dans le plan horizontal, comme AF, CE, et que les distances au plan horizontal doivent être mesurées sur les perpendiculaires à la ligne de terre, tracées dans le plan vertical, comme AI, CH.

Ainsi, non seulement le dessin complet d'un corps fournit toutes les dimensions dont on peut avoir besoin, pour construire ce corps, mais en outre il donne les moyens de le placer comme il était placé ou comme il doit l'être. Effectivement, il suffirait de faire sur le terrain ou sur un plancher, un triangle égal à EDF, d'après l'échelle, et de planter verticalement, aux sommets de ce triangle, trois tiges égales à AG, pour poser l'équerre horizontalement et à une distance de $0^m,2$ du plan horizontal.

168. C'est parfois uniquement pour donner les vraies dimensions d'un corps et indiquer les positions exactes de ses parties, les unes par rapport aux autres, qu'on fait un plan et une élévation. Dans ce cas, on ne tient aucun compte des distances de ces parties au plan vertical ou au plan horizontal; ces deux plans n'existant pas, et ne devant servir qu'à l'intelligence du dessin, sont placés arbitrairement par rapport au corps. Quelquefois même on y substitue deux faces de ce corps, s'il en a deux qui soient perpendiculaires entre elles, afin de simplifier le tracé.

La figure 19 (P. III), par exemple, présente aussi bien que la figure 18, les dimensions et la forme de l'objet dont elle contient le plan et l'élévation, quoique ce soit la grande face inférieure de l'équerre qui serve de plan horizontal, et une des petites faces qui serve de plan vertical.

Construire le plan et l'élévation d'une pièce de bois carré, longue de 6^m, *large de* $0^m,5$, *épaisse de* $0^m,2$.

Puisqu'on peut prendre arbitrairement les plans de projection, nous supposerons le plan horizontal parallèle aux larges faces et le plan vertical parallèle aux faces

étroites. Il s'ensuivra que les longues arêtes seront parallèles à la ligne de terre YZ (P. IH, F. 20). Faites donc un rectangle ABCD, dont les grands côtés aient 6^m ou 6 parties de l'échelle, et soient parallèles à YZ; donnez $0^m,5$ aux petits côtés AD, BC et prolongez-les sur le plan vertical; tracez EF parallèlement à YZ; prenez EG et FH de $0^m,2$, puis tirez GH. Le rectangle ABCD sera le plan de la pièce de bois, et le rectangle EFHG en sera l'élévation.

SURFACES COURBES.

169. Les faces courbes des corps, qui ne sont interrompues par aucune face plane, sont plus ordinairement appelées *surfaces courbes*, probablement parce que chacune peut être considérée comme l'ensemble d'une multitude de petites faces planes extrêmement étroites, dont le corps serait complètement enveloppé (85).

Il y a des surfaces courbes *réglées*, et d'autres qui ne le sont pas. Les premières sont celles sur lesquelles une règle peut s'appliquer de toute sa longueur, au moins dans un sens; les positions qu'elle y peut prendre sont parallèles, ou bien elles concourent toutes en un point, ou bien elles se croisent sans se rencontrer. Un tuyau de poêle, une voûte de cave, le pourtour d'une meule, un crayon de mine de plomb, présentent chacun une surface courbe réglée selon des parallèles. Un pain de sucre, le toit rond et pointu d'une tour, une colonne, un canon de fusil, un éteignoir, un seau évasé, un entonnoir en fer blanc, ont chacun une surface courbe réglée selon des concourantes. Les ailes d'un moulin à vent, une planche gauchie, les oreilles ou versoirs d'une charrue, le dessous en plâtre d'un escalier, montrent des surfaces courbes réglées suivant des droites qui se croisent sans se rencontrer. Ces dernières surfaces sont dites *gauches;* la Géométrie élémentaire ne s'en occupe point.

SURFACES CYLINDRIQUES.

170. Toute surface courbe qui est réglée selon des parallèles, s'appèle *surface cylindrique;* et le corps qu'elle enveloppe, porte le nom de *cylindre*, quand ses autres limites sont deux faces planes.

Si les faces planes qui forment les deux bouts d'un cylindre, sont parallèles, le cylindre est *complet* et ces faces en sont les *bases*. Si elles ne sont pas parallèles, le cylindre

est *tronqué*; une des faces planes est prise pour base et l'autre est la *troncature*. Toutes les droites qu'on peut tracer sur la surface courbe d'un cylindre complet, ont même longueur (95).

Un cylindre qui a un cercle pour base est dit *circulaire*; il est dit *oblong*, s'il a pour base une *ovale*, ou tout autre courbe qui soit fermée, comme celle-là, mais non circulaire.

Lorsque les droites de la surface cylindrique sont d'équerre sur la base, le cylindre est *droit*; il est *oblique* dans le cas contraire.

Enfin, un corps cylindrique dont l'intérieur est évidé en cylindre, forme un *manchon cylindrique*. Ordinairement, les deux faces courbes d'un manchon cylindrique sont *équidistantes*, c'est-à-dire que leur distance est partout la même (*).

D'après ces définitions, une meule non encore percée, un crayon de mine de plomb, le rouleau du laboureur, l'âme d'un fusil, un puits, un trou de tarière fait de part en part et d'équerre dans un corps à faces parallèles, sont des cylindres droits, circulaires et complets; un litre, une quarte, un tuyau de poêle, un anneau plat, une cuve sont des manchons cylindriques, droits, circulaires et complets, si l'on considère leur matière, et des cylindres creux, si l'on considère leur vide; les baignoires, certains cuviers et plusieurs sortes d'autres vases sont des manchons cylindriques ou des cylindres creux, droits, oblongs et complets.

Il serait difficile de citer quelques exemples de cylindres obliques: leur rareté nous permettra d'abréger, en les passant sous silence.

La droite qui joint les centres des deux faces planes d'un cylindre, est l'*axe* de ce corps. L'axe est toujours parallèle aux droites de la surface cylindrique (66).

171. *Dessiner un cylindre droit, circulaire et complet, dont l'axe est vertical et dont la longeur L et le rayon R sont donnés* (P. III, F. 21).

Le plan est un cercle égal à la base. Vous décrirez donc sur le plan horizontal, au-dessous de la ligne de terre YZ, un cercle A qui ait la longueur R pour rayon. L'élévation doit être un rectangle égal à celui que for-

(*) Il serait bon que tous les corps, exécutés en bois, en fer-blanc, etc., fussent mis sous les yeux des élèves.

ment les diamètres tracés dans les bases, parallèlement à YZ, et les deux droites qui joignent les extrémités de ces diamètres. Abaissez donc du centre A, une perpendiculaire sur YZ; menez deux tangentes parallèles à cette perpendiculaire AA″ (54); tirez BC parallèlement à YZ; portez la longueur L de C en D et de B en E; puis joignez D à E. Le cercle A indiquera la forme du cylindre; le rectangle BCDE donnera le diamètre BC de ce cylindre et la longueur CD. L'axe est représenté sur le plan par le centre A, et sur l'élévation par la droite A′A″=L.

172. *Mesurer la surface courbe d'un cylindre droit et complet.*

On peut concevoir cette surface composée d'une multitude de petits rectangles très-étroits, dont la hauteur soit la longueur CD du cylindre (P. III, F. 21), et dont les bases forment un polygone qui se confonde avec un des cercles, si le cylindre est circulaire. Or, la somme des superficies de ces rectangles égalera la somme de leurs bases multipliée par la hauteur commune, c'est-à-dire la circonférence A du cylindre, multipliée par la longueur CD. Par conséquent, *une surface cylindrique, droite, circulaire et complète égale la circonférence de sa base, multipliée par sa longueur L.* Comme toute circonférence égale son diamètre D multiplié par 3,1416, la formule S.Cy=D×3,1416×L donnera la surface courbe de tout cylindre droit et circulaire, lorsqu'on y remplacera D et L par leurs longueurs mesurées avec la même unité.

Si, par exemple, D=0^{m},15 et que L=0^{m},85, la formule devient S.Cy=0^{m},15×3,1416×0^{m},85=0^{mm},400554, ou 40 décimètres carrés, 5 centimètres carrés et 54 millimètres carrés (126).

Lorsque le cylindre est oblong, on mesure le contour de la base au moyen d'une ficelle et l'on multiplie la longueur de ce contour par celle de la surface.

173. *Mesurer la surface totale d'un cylindre droit et complet.*

Calculez la surface courbe et ajoutez-y le double de la superficie de l'une des bases.

Dans l'exemple précédent où le rayon est 0^{m},075, la superficie d'une base (155) est 0^{mm},005625×3,1416=0^{mm},0176715; les deux bases font ensemble 0^{mm},0176715

$\times 2 = 0^{mm},035343$, et la surface totale du cylindre circulaire vaut $0^{mm},400554 + 0^{mm},035343 = 0^{mm},435897$.

174. *Dessiner un cylindre droit, circulaire et tronqué.*

Pour avoir le dessin le plus simple, il faut supposer le cylindre placé verticalement sur le plan horizontal, et la troncature perpendiculaire au plan vertical. Alors le plan est un cercle A de même rayon que le cylindre (P. III, F. 22), et l'élévation est un trapèze BCDE dont la grande base BC égale la plus longue droite de la surface, et dont la petite base DE égale la plus courte droite. Ces côtés du trapèze sont d'ailleurs tangens au cercle A, par leurs prolongemens; BE est le diamètre du cylindre, CD la plus grande corde de la troncature, et A'A'' l'axe.

175. *Mesurer la surface courbe d'un cylindre droit et tronqué.*

Si le cylindre est circulaire, mesurez la plus longue droite BC et la plus courte droite DE de la surface (P. III, F. 22); prenez leur moyenne, c'est-à-dire la moitié de leur somme, et multipliez la circonférence de la base par cette moyenne.

Si le cylindre est oblong et que la base puisse être partagée en quatre parties égales par deux droites d'équerre, vous agirez encore comme dans le cas précédent; mais lorsque la base ne sera pas divisible de cette façon, vous en partagerez le contour en parties égales et peu grandes; vous mesurerez toutes les droites de la surface qui partiront des points de division, et c'est par la moyenne de toutes ces longueurs, que vous multiplierez la longueur du contour prise au moyen d'une ficelle. Le produit donnera la surface cylindrique d'autant plus exactement, que vous aurez mesuré un plus grand nombre de droites (158).

176. *Dessiner un manchon cylindrique droit, circulaire, complet et vertical.*

Le plan se compose de deux circonférences concentriques; le rayon de la plus petite égale le rayon du cylindre creux ou intérieur; le rayon de la plus grande est celui de la surface cylindrique extérieure. L'élévation doit présenter un grand rectangle BCDE pour la surface extérieure (P. III, F. 23); un petit rectangle FGHI pour la surface intérieure, et la ligne A' A'' de l'axe. Les côtés BC, DE du grand rectangle sont tangens à la grande circonférence, et les côtés FG, HI de l'autre sont tangens à la petite.

Il est à observer ici que les arêtes et autres lignes d'un corps ne se représentent pas toujours de la même manière. Les lignes du plan qui répondent à celles qu'on apercevrait sur l'objet en promenant les yeux au-dessus, et les lignes de l'élévation qui répondent à celles qu'on verrait sur l'objet en le regardant par devant, se font *continues*, en raison de ce qu'elles figurent des *lignes vues*; les lignes qui en figurent d'autres qu'on ne pourrait pas apercevoir dans les mêmes circonstances, et que pour cela on appelle *lignes cachées*, se font *pointillées*, c'est-à-dire en petits points ronds ou plutôt en traits séparés beaucoup plus courts que ceux d'une ligne de construction. D'après ces conventions, il est clair que les droites FG, HI doivent être pointillées, car placé en avant du manchon cylindrique, on ne verrait pas celles qu'elles représentent.

177. *Mesurer la surface courbe totale d'un manchon cylindrique quelconque.*

L'opération consiste à mesurer séparément la surface cylindrique intérieure et la surface cylindrique extérieure, en employant les moyens précédens, et à faire la somme des superficies trouvées.

178. *Mesurer la surface totale d'un manchon cylindrique quelconque.*

Après avoir fait la somme des deux surfaces courbes, il faut y ajouter le double de l'espace compris entre les deux contours d'une des bases, si le manchon est complet, ou l'espace compris entre les deux contours de la base, et l'espace compris entre les deux contours de la troncature, si le manchon est tronqué.

Lorsque les contours sont circulaires, on obtient la superficie qu'ils comprennent entre eux, en retranchant celle du petit cercle, de celle du grand. Quand les contours ne sont pas des circonférences, il faut d'abord mesurer la superficie renfermée dans chacun, comme l'enseigne le n° 159, puis retrancher l'une de l'autre.

SURFACES CONIQUES.

179. Toute surface courbe qui est réglée selon des droites concourantes, s'appèle *surface conique*, et le corps qu'elle enveloppe, porte le nom de *cône*, si d'ailleurs il n'a pas d'autres limites courbes.

Le cône est *complet*, quand il renferme le point où concourent les droites de la surface courbe: alors il n'a qu'une

seule face plane qui est la *base;* il est *tronqué* dans le cas contraire, et alors il a deux faces planes: si ces deux faces sont parallèles, elles prennent ensemble le nom de *bases;* si elles ne le sont pas, l'une est la *base* et l'autre la *troncature.* Le cône est *circulaire* ou *oblong,* selon qu'il a un cercle ou une autre figure pour base.

Le point où concourent les droites d'une surface conique, s'appèle *sommet.* La droite qui joint le sommet au centre de la base, se nomme *axe.* Le cône et le tronc de cône sont *droits,* quand l'axe est perpendiculaire à la base; ils sont obliques, si l'axe l'est lui-même. Dans le premier cas, toutes les droites de la surface courbe font le même angle sur la base (89). Enfin, il y a des *manchons coniques,* comme des manchons cylindriques; mais les premiers résultent toujours de cônes tronqués.

Ainsi, les pains de sucre non émoussés, les pointes des paratonnerres et des poinçons à percer, l'intérieur d'un éteignoir sont des cônes droits, circulaires et complets; une colonne et les pierres rondes qui la composent, sont des cônes tronqués ou des *troncs* de cône droit et circulaire; il en est de même d'un seau évasé, d'un chapeau d'homme, d'un dé de tailleur, si l'on considère leur vide; mais ces mêmes corps sont des manchons coniques, quand on considère leur matière.

Les arts n'exécutent presque jamais ni cône oblique, ni tronc de cône à faces planes non parallèles; ainsi, nous n'aurons pas à nous occuper de ces corps.

180. *Dessiner un cône droit, circulaire et complet dont l'axe est vertical.*

Tracez sur le plan horizontal, un cercle égal à la base, vous aurez le plan. Abaissez du centre A (P. III, F. 24), une perpendiculaire AA′ sur la ligne de terre YZ; menez des tangentes parallèles à AA′; d'un des points B, C où elles rencontrent YZ, avec un rayon égal à la longueur du cône, mesurée sur la surface courbe, décrivez un arc qui coupe le prolongement de AA′ en un point A″; puis joignez ce point à B et à C. Le triangle symétrique BA″C formera l'élévation du cône, A′A″ donnera la vraie longueur de l'axe, BA″ sera celle des droites de la surface, et A″ représentera le sommet.

181. *Mesurer la surface courbe d'un cône droit, circulaire et complet.*

Cette surface est la somme d'une multitude de triangles

dont les très-petites bases formeraient le contour de la base du cône, et qui auraient pour hauteur commune, la longueur d'une droite de la surface conique. Or, la somme de ces triangles égale évidemment la moitié du produit de la somme des bases multipliée par la hauteur commune. Donc, *la surface courbe d'un cône droit égale la moitié du produit du contour de la base multiplié par une droite de cette surface.*

Appelons D le diamètre de la base et L la longueur de la surface; la formule qui donnera la surface courbe de tout cône droit et circulaire, sera $S.Co=\frac{D\times 3,1416\times L}{2}$.

Si, par exemple, $D=0^m,04$ et que $L=0^m,3$, le nombre des mètres carrés contenus dans la surface conique sera exprimé par $\frac{0^m.04\times 3.1416\times 0^m,3}{2}=0^{mm},01885$ ou 1 décimètre carré, 88 centimètres carrés et 50 millimètres carrés.

La surface totale d'un cône droit et complet est évidemment la somme de la surface courbe et de la superficie de la base.

182. *Dessiner un tronc de cône droit et circulaire, à bases parallèles.*

Le plan se compose de deux circonférences concentriques, lorsque l'axe est vertical: l'une est égale à la grande base et l'autre à la petite. Pour construire l'élévation, il faut abaisser du centre A, une perpendiculaire AA″ sur la ligne de terre (P. III, F. 25); mener une parallèle à YZ, qui en soit éloignée d'une longueur A′A″ égale à la distance des deux bases; puis tracer des tangentes aux deux circonférences du plan, parallèlement à AA″; celles de la grande circonférence déterminent le diamètre BC de la base inférieure; celles de la petite donnent le diamètre DE de la base supérieure; le trapèze symétrique BCDE est l'élévation du tronc de cône, A′A″ représente l'axe, et BE ou CD est la vraie longueur des droites de la surface conique.

183. *Mesurer la surface courbe d'un tronc de cône droit et circulaire à bases parallèles.*

Elle peut être considérée comme couverte d'une multitude de trapèzes dont les très-petites bases forment les contours des deux bases du tronc. Ces trapèzes ont une hauteur commune BE (P. III, F. 25); chacun est égal à la demi-somme de ses deux bases multipliée par sa

hauteur (139), et leur somme vaut conséquemment la demi-somme de toutes les bases, multipliée par BE. Donc, *la surface courbe du tronc de cône droit et circulaire, à bases parallèles, égale la moitié du produit fait avec la somme des contours des bases et une droite de cette surface.*

Soient D le diamètre de la grande base, *d* celui de la petite base et L la longueur de BE. La surface du tronc de cône circulaire et droit à bases parallèles, sera représentée par cette formule S. T. Co$=\frac{D\times3,1416+d\times3,1416}{2}\times L=\frac{D+d}{2}\times3,1416\times L$. Vous calculerez donc une pareille surface en multipliant la demi-somme des deux diamètres par 3,1416 et le produit par la longueur d'une des droites.

Si, par exemple, vous voulez évaluer le crépis extérieur d'une tour ronde, dont le mur en talus forme une surface tronc-conique, et que cette tour ait extérieurement 10^m de diamètre par le bas, 9^m de diamètre en haut, 50^m de longueur, vous écrirez S. T. Co$=\frac{10^m+9^m}{2}\times3,1416\times50^m=9^m,5\times3,1416\times50^m=475^{mm}\times3,1416=1492^{mm},26$.

184. *Dessiner un manchon conique, droit et circulaire, à bases parallèles.*

Un pareil corps présente deux surfaces tronc-coniques, l'une extérieure, l'autre intérieure. Vous pourrez donc exécuter le dessin en appliquant successivement à ces deux surfaces, ce qui a été prescrit dans le n° 182, pour une seule. Mais vous observerez de pointiller la grande circonférence et les droites BE, CD de la surface intérieure (P. III, F. 26), car ces trois lignes sont évidemment cachées (176).

185. *Mesurer la surface totale d'un manchon conique, droit, à bases parallèles.*

Procédez comme il est enseigné dans les n°s 178 et 183.

SURFACES SPHÉRIQUES.

186. De toutes les surfaces courbes non réglées ou sur lesquelles une règle ne saurait s'appliquer de toute sa longueur, dans aucun sens, nous n'avons à considérer que celles qui peuvent être coupées selon des

circonférences, par des plans parallèles. Les autres se présentent trop rarement pour que nous devions nous en occuper.

Une des plus remarquables parmi les premières, c'est la surface des boules; les géomètres l'appèlent *surface sphérique*, parce qu'ils ont donné le nom de *sphère* au corps qu'elle enveloppe.

La surface sphérique a tous ses points également éloignés d'un autre qui en est le centre. Les droites qui vont de ce centre à la surface, sont des *rayons* de même longueur; celles qui vont d'un point de la surface à un autre, en passant par le centre, sont des *diamètres*, et il y a égalité entre tous ces diamètres, comme entre les rayons qui en sont les moitiés.

On prend le diamètre d'une sphère au moyen d'une double équerre ou compas analogue à celui dont se servent les cordonniers, pour mesurer la longueur d'un pied humain; mais il faut que les petites branches parallèles de ce compas soient sensiblement plus grandes que la moitié du diamètre à mesurer; il faut aussi que toute la sphère ait passé entre elles, pour que leur écartement donne une mesure juste. A défaut de compas de cordonnier, on se sert d'une règle et de deux équerres, comme pour mesurer le diamètre d'une tour (22).

187. *Dessiner une sphère dont le diamètre D est donné.* (P. III, F. 27).

Le plan et l'élévation sont des cercles A, A′ d'un rayon égal à la moitié de D; les centres de ces cercles doivent être placés sur une droite AA′ perpendiculaire à la ligne de terre YZ.

188. *Mesurer une surface sphérique.*

Il suffit de multiplier par 3,1416 *le quarré numérique du diamètre* mesuré en mètres, par exemple; le produit donne le nombre de mètres carrés contenus dans la surface.

Ainsi, $S.S = D \times D \times 3,1416$ est la formule à l'aide de laquelle on peut calculer la surface d'une sphère quelconque.

Si le diamètre $D = 0^m,25$, on a $S.S = 0^m,25 \times 0^m,25 \times 3,1416 = 0^{mm},0625 \times 3,1416 = 0^{mm},19635$.

189. *Mesurer une calotte sphérique.*

On nomme *calotte sphérique*, la surface courbe d'une portion de sphère terminée par une face plane, laquelle ne peut être qu'un cercle. Le plan de cette surface courbe

est un cercle égal à celui de la face plane, dont BD forme le diamètre, par exemple (P. III, F. 28); l'élévation est un segment de cercle BCD.

La face plane se nomme *base*, et la plus grande distance CE de cette base à la surface courbe, est appelée *hauteur*.

Pour avoir la superficie d'une calotte, il faut multiplier la circonférence A' de la sphère par la hauteur CE.

La formule est donc S.Cal=D×3,1416×H, D représentant le diamètre de la sphère.

190. *Mesurer une zône sphérique.*

Une *zône* sphérique est la surface courbe d'une portion de sphère terminée par deux faces planes parallèles qui sont des cercles, et qu'on nomme *bases*. La distance de ces bases s'appèle la *hauteur* de la zône.

L'élévation est une partie BDFG du cercle A', comprise entre deux parallèles BD, FG (P. III, F. 28). Le plan est l'espace renfermé entre deux cercles qui ont A pour centre commun, et les cordes BD, FG pour diamètres.

La superficie d'une zône se mesure comme celle d'une calotte. Ainsi, la formule est S.Z=D×3,1416×H.

SURFACES ANNULAIRES.

191. On nomme surface annulaire, la surface totale de tout anneau rond, semblable aux anciennes bagues d'alliance.

Dessiner un anneau rond.

Le plan est formé de deux circonférences concentriques (P. III, F. 29); l'une égale la plus grande circonférence de l'anneau, l'autre égale la plus petite du vide. Leur distance ou la différence de leurs rayons est, par conséquent, l'épaisseur de l'anneau (59).

L'élévation présente deux droites BC, DE parallèles à la ligne de terre YZ, dont la distance est la même que celle des circonférences du plan. Pour achever le dessin, faites l'axe de l'anneau, en abaissant de A une perpendiculaire AA'' sur YZ; menez parallèlement à cette perpendiculaire, quatre tangentes aux deux circonférences du plan; puis, inscrivez deux cercles dans les carrés formés par ces tangentes et les parallèles BC, DE (149). La figure BCFDEG terminée par ces parallèles et les moitiés extérieures des petits cercles, sera l'élévation de l'anneau. Les moitiés intérieures des mêmes cercles devront être pointillées.

192. *Mesurer une surface annulaire.*

Il faut multiplier la circonférence qui tiendrait le milieu entre celles du plan, par la circonférence dont le diamètre égale l'épaisseur; car, si l'on coupait l'anneau par un plan vertical dirigé selon un rayon, et qu'on le redressât, il en résulterait un cylindre droit, circulaire et complet dont la hauteur égalerait la circonférence moyenne (172): la grande circonférence se raccourcirait, la petite s'alongerait, et chacune deviendrait égale à celle du milieu. Ployez en effet un cylindre flexible, vous en ferez un anneau rond.

Soit donc D le diamètre de la plus grande circonférence, d celui de la plus petite, e l'épaisseur; on devra calculer la longueur d'une circonférence qui ait pour diamètre, la moyenne de D et de d, ou $\frac{D+d}{2}$, et multiplier cette circonférence par $e \times 3,1416$, Or, la circonférence dont $\frac{D+d}{2}$ est le diamètre, a pour longueur $\frac{D+d}{2} \times 3,1416$. La superficie cherchée vaut donc $\frac{D+d}{2} \times 3,1416 \times e \times 3,1416$. D'ailleurs, l'épaisseur e est évidemment la moitié de la différence des deux diamètres D, d ou $\frac{D-d}{2}$. Par conséquent, la surface annulaire est exprimée aussi par ce produit $\frac{D+d}{2} \times 3,4416 \times \frac{D-d}{2} \times 3,1416$, et sa formule est $S.A = \frac{D+d}{2} \times \frac{D-d}{2} \times 3,1416 \times 3,1416$.

Ainsi, *on mesure une surface annulaire, en multipliant la demi-somme des deux diamètres D, d, par leur demi-différence, et le produit par le quarré de* 3,1416.

Supposons, pour exemple, que le plus grand diamètre d'un anneau soit de $0^m,25$ et le plus petit de $0^m,15$. Leur demi-somme sera $0^m,20$ et leur demi-différence $0^m,05$. Le produit de ces deux nombres égale $0^{mm},01$; le quarré de 3,1416 donne 9,869 650 56, et conséquemment la surface annulaire égale $0^{mm},01 \times 9,869\,650\,56 = 0^{mm},098696$.

Mesurer la surface d'une pièce de bois courbe.

La surface d'une pièce de bois courbe, d'une jante de roue, par exemple, sans être précisément une surface annulaire, est pourtant du même genre. Aussi son mesurage est-il analogue au précédent: *il faut multiplier le contour d'un des bouts, par la longueur de l'arc qui tient le milieu entre le plus grand et le plus petit.* Quand ni l'un, ni l'autre bout ne forme un plan perpendiculaire aux tangentes des arcs, comme les bouts d'une jante, c'est dans

un tel plan qu'on doit prendre le contour de la pièce.

Bien entendu que les faces planes des extrémités ne font point partie de la surface mesurée ainsi qu'il vient d'être dit.

SURFACES COURBES CIRCULAIRES.

193. Nous comprendrons sous le titre de *surfaces courbes circulaires*, les surfaces courbes quelconques qui, sans être cylindriques, coniques, sphériques, ni annulaires, peuvent cependant être coupées, comme celles-là, selon des circonférences, par des plans parallèles. La surface courbe d'un tonneau, celle d'une cloche, celles de plusieurs vases sont dans ce cas. La même méthode de mesurage s'applique à toutes, et il suffit d'un seul exemple pour la faire concevoir.

Mesurer la surface courbe d'un tonneau.

Vous partagerez en parties égales qui puissent être regardées, sans grande erreur, comme des droites, plusieurs courbes tracées sur la surface, perpendiculairement aux circonférences parallèles existantes. Sur le tonneau, ces courbes se trouvent toutes faites : ce sont les joints des douves. Les circonférences parallèles qui passeraient par les points de division correspondans, limiteraient des surfaces tronc-coniques droites et circulaires, dont la somme serait égale à celle de la superficie demandée. Il s'agit donc de trouver la somme de ces surfaces. Or, chacune est égale à la demi-somme des circonférences de ses deux bases, multipliée par sa longueur (183), et par conséquent, la totalité vaut le produit de la longueur commune, multipliée par la demi-somme des deux circonférences extrêmes ajoutée à la somme de toutes les circonférences intermédiaires (158).

Ainsi, pour mesurer la surface courbe d'un tonneau, vous prendrez, à l'aide d'une ficelle, les longueurs des circonférences des deux bouts et celle de chacune des circonférences déterminées par les points de division correspondans des joints ; vous ferez la demi-somme des deux premières et vous l'ajouterez à la somme des autres ; puis vous multiplierez le tout par la distance de deux points de division voisins, pris sur le même joint, cette distance étant mesurée avec une ficelle, pour plus d'exactitude. Le produit sera la superficie demandée.

CORPS.

Après avoir étudié isolément les arêtes et les faces, nous avons à considérer les corps dans leur ensemble. Il suffit d'en distinguer deux classes : les *polyèdres* et les corps

ronds ou à surface courbe. Tout objet que sa forme ne permet pas de placer dans l'une ou l'autre de ces classes, peut être décomposé en parties qui s'y rapportent.

POLYÈDRES.

194. On appelle *Polyèdres*, les corps dont toutes les faces sont planes. Les arêtes d'un polyèdre sont donc toutes des lignes droites (90).

Les polyèdres portent différens noms qui dépendent de la direction des arêtes limitées par une même face : ce sont des *prismes*, si ces arêtes sont parallèles ; ce sont des *pyramides*, si ces arêtes concourent toutes en un même point. Quand les arêtes qui partent d'une même face, ne se trouvent ni dans l'un, ni dans l'autre de ces cas, le corps conserve le nom générique de *polyèdre*.

Ainsi, une pièce de bois de charpente, un double-décimètre de Kutsch, une règle, une équerre, les briques, les maisons, leurs toits, leurs cheminées, sont des prismes pleins ou creux ; les clochers à faces planes, les toits des pavillons, les pointes de certains marteaux, celles des clous et des compas, les trémies, les cheminées en hottes renversées, sont des pyramides pleines ou creuses ; les diamans et tous les corps taillés à facettes, comme les pierres précieuses, sont simplement des polyèdres.

PRISMES.

195. La face d'où partent les arêtes parallèles d'un prisme est sa *base*. Si le prisme est *complet*, il a deux bases parallèles, et toutes les arêtes parallèles sont égales (95). Lorsque ces mêmes arêtes se trouvent inégales et qu'elles sont pourtant limitées par deux faces planes, le prisme est *tronqué* ; l'une de ces faces planes en est la base et l'autre la *troncature*. Dans les deux cas, les autres faces du prisme sont les *faces latérales*.

Un prisme est *droit* ou *oblique*, selon que les arêtes parallèles sont perpendiculaires ou obliques sur la base.

On nomme *hauteur* d'un prisme complet, la perpendiculaire abaissée d'un point de sa base supérieure, sur la base inférieure, étendue s'il est nécessaire. Une des arêtes parallèles donne la *longueur* d'un prisme complet. Par conséquent, la longueur et la hauteur d'un prisme droit sont égales ; mais il n'en est pas de même pour les prismes obliques.

C'est par leurs bases qu'on distingue les prismes les uns des autres. Si la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc.

Lorsque les bases d'un prisme quadrangulaire sont des parallélogrammes, il prend le nom de *parallélipipède*; s'il est droit et que ses bases soient des rectangles, il s'appèle *prisme rectangle*; s'il est droit et que ses bases soient des carrés, on le nomme *prisme carré*. Les madriers, les fers plats, les briques, les carreaux de vître, les feuilles de papier même, sont des prismes rectangles; les piliers, les potaux, les carrelets, sont des prismes carrés.

Enfin, le prisme carré porte le nom de *cube*, quand ses 6 faces sont des carrés; alors ses 12 arêtes sont égales: tels sont les dés à jouer.

196. Vous savez déjà dessiner un prime triangulaire et droit (167), un prisme droit et rectangle (168); un prisme carré aurait le même plan ABCD que ce dernier (P. III, F. 20), mais son élévation devrait être évidemment un rectangle égal à ABCD. Reste à vous apprendre comment se fait le dessin d'un prisme oblique, d'un prisme tronqué et d'un cube.

Dessiner un cube dont la base est horizontale.

Le plan est nécessairement un carré A égal ou semblable à l'une des faces du cube (P. III, F. 30), et si vous placez une des faces latérales parallèlement au plan vertical, l'élévation est un autre carré A'; mais dans tout autre cas, l'élévation est un rectangle A'A''C''C' (F. 31), sur lequel doit être marquée l'arête vue B. Il faut même y tracer l'arête cachée D, quand elle n'est pas masquée par l'autre, ou quand la diagonale BD du plan ABCD ne se trouve pas perpendiculaire à la ligne de terre YZ.

197. *Dessiner un prisme hexagonal tronqué dont la base est horizontale.*

Le plan est un hexagone égal à la base ou semblable et fait d'après l'échelle; l'élévation est un trapèze A'A''D''D' (P. III, F. 32), si vous placez le prisme de manière que la troncature soit perpendiculaire au plan vertical. Les arêtes vues B, C doivent être tracées sur ce trapèze. Vous n'y voyez pas les arêtes cachées E, F, parce que les diagonales BF, CE du plan sont perpendiculaires à la ligne de terre.

198. *Dessiner un prisme oblique à bases triangulaires.* Plaçons les bases horizontalement, et rendons les arêtes qui les séparent, parallèles au plan vertical. Il faudra faire sur le plan horizontal, un triangle ABC égal ou semblable à chaque base (P. III, F. 33); abaisser de A une perpendiculaire AA′ sur la ligne de terre; porter la hauteur du prisme de A′ en G; mener par G une parallèle à la ligne de terre, et décrire de A′, avec un rayon égal à la longueur du prisme, un arc qui coupe GE en D′. La droite A′D′ sera l'élévation de celle des arêtes parallèles qui part de A; pour en avoir le plan AD, vous tracerez par A une parallèle à la ligne de terre, et par D′ une parallèle à AG. Le dessin s'achève ensuite au moyen de parallèles à AD et à AA′ tirées par B, C, de parallèles à A′D′ menées par B′, C′, et de parallèles à AG tracées par E′, F′. Le plan du prisme oblique est donc la figure ABCFDE qui renferme deux triangles égaux et trois parallélogrammes; l'élévation est le parallélogramme A′B′E′D′ qui se compose de deux autres. Les droites BC, C′F′ sont pointillées, parce qu'elles représentent des lignes cachées, l'une par rapport au plan, l'autre par rapport à l'élévation.

Comparaison des prismes.

199. L'espace renfermé entre toutes les faces d'un corps est ce qu'on appelle le *volume* ou la *capacité* de ce corps : le premier de ces mots s'emploie pour désigner tout l'espace plein compris entre des faces extérieures, le second, pour désigner tout l'espace vide compris entre des faces intérieures : on dit, par exemple, le volume d'une pierre de taille, d'une pièce de bois, d'une barre de fer; la capacité d'une quarte, d'un litre, d'un seau, d'un tonneau. La capacité du tonneau est bien différente du volume; elle en diffère de tout l'espace occupé par le bois dont sont faites les parois. Par conséquent, la capacité d'un vase quelconque égale le volume du liquide ou des grains qu'il faudrait pour le remplir, et le volume du même vase égale la capacité plus le volume des parois. Toutefois, les relations qui existent entre les volumes, sont les mêmes pour les capacités, et cela doit être, puisque la capacité d'un vase est toujours le volume du corps ou de l'ensemble des corps qui le rempliraient.

200. *Deux prismes quelconques sont équivalens en*

volume, quand ils ont des bases équivalentes et même hauteur. Si, par exemple, le carré A de la figure 30 (P. III), et le triangle ABC de la figure 33 renfermaient la même superficie, que de plus le côté de ce carré égalât A′ G (F. 33), le volume du cube serait le même que celui du prisme triangulaire oblique.

En effet, chaque corps peut être considéré comme composé de tranches extrêmement minces parallèles aux bases; ces tranches sont en même nombre dans l'un et dans l'autre; elles égalent les bases correspondantes (150), et par conséquent, celles du prisme ont même superficie que celles du cube; d'où suit que les deux volumes se trouvent composés d'un même nombre d'élémens équivalens.

Deux prismes quelconques de même hauteur, se contiennent comme leurs bases, et deux prismes qui ont des bases équivalentes, se contiennent, comme leurs hauteurs. Si donc il est reconnu qu'un prisme rectangle et un prisme triangulaire ont chacun 14^{mm} de base, que la hauteur du premier est 15^{m} et celle du second 5^{m}, on pourra être certain que le prisme rectangle vaut trois fois le prisme triangulaire. Cela résulte évidemment de la démonstration précédente.

Ces principes font éviter de longs mesurages. Supposez, pour vous en convaincre, qu'une pile de bois à brûler, longue de 10^{m}, contienne 16 cordes, et qu'il s'agisse de corder une autre pile de même hauteur, longue de 40^{m}. On pourra trouver le nombre des cordes de cette grande pile, en multipliant 16 par le quotient d'une des bases divisée par l'autre. Or, les bases sont des rectangles qui ont pour largeur commune la longueur des bûches; ces bases se contiennent donc comme leurs longueurs 40 et 10 (120), c'est-à-dire 4 fois, et l'on trouve que la grande pile renferme 64 cordes, par la simple multiplication des deux nombres 16 et 4.

Si les deux piles de bois avaient même longueur, il y aurait égalité entre leurs bases, et dans le cas où les hauteurs seraient 12^{m} et 8^{m}, la petite contenant toujours 16 cordes, il y en aurait $16 \times \frac{12}{8} = 24$ dans la grande.

Combien faut-il de briques pour construire une cloison longue de 8^{m} et haute de 4^{m}?

Les briques sont ordinairement posées de champ; ainsi leur épaisseur est la même que celle de la cloison. Par conséquent, cette cloison doit contenir autant de briques, que sa superficie 32^{mm} contient une grande face de brique.

Cette grande face a $0^m,23$ sur $0^m,112$; elle est donc de $0^{mm},02576$. Divisant 32^{mm} par $0^{mm},02576$, on trouve 1242 plus une fraction, et l'on en conclut qu'il faut 1243 briques.

201. *Deux prismes sont égaux, quand les arêtes, les faces et les coins de l'un sont de même grandeur que les parties correspondantes de l'autre* (92); mais il suffit pour prononcer que deux cubes sont égaux, d'avoir reconnu qu'il y a égalité entre les arêtes des deux corps; car elle existe alors entre les faces, et tous les coins étant droits, sont nécessairement égaux.

Mesurage des prismes.

202. Un prisme présente 6 choses distinctes à mesurer : une arête, la hauteur, une face, la surface latérale, la surface totale et le volume. Le mesurage d'une arête rentre dans celui des droites (71); le mesurage d'une face revient à celui des triangles, des quadrilatères, ou des polygones d'un plus grand nombre de côtés. On obtient la surface latérale, en faisant la somme de tous les parallélogrammes qui vont d'une base à l'autre (195), et l'on a la surface totale, si à cette somme on ajoute les deux bases. Quant à la hauteur, elle est donnée par la longueur d'une arête, si le prisme est droit; elle se prend au fil-à-plomb, lorsque le prisme est oblique et à bases horizontales; enfin, il faudrait un compas analogue à celui des cordonniers, pour mesurer la hauteur du prisme oblique dont les bases seraient inclinées : les petites branches parallèles devraient s'appliquer sur ces bases. Il ne vous reste donc plus qu'à savoir mesurer le volume.

203. L'unité de mesure pour les volumes, est ordinairement le volume d'un cube qui a pour arête l'unité de mesure des longueurs; c'est pourquoi l'on dit souvent *cuber* au lieu de *mesurer un volume*. Si son arête est d'un pouce, l'unité de volume est nommée *pouce cube*, ce qui signifie *cube d'un pouce de côté*; si l'arête est d'un pied, on a le *pied cube*; si elle est d'une toise, elle donne la *toise cube*.

On peut employer aussi des prismes carrés pour mesurer les volumes. Le bois de charpente se mesurait autrefois à la *solive*; cette unité avait 12 pieds de longueur et 6 pouces *d'écarrissage*, c'est-à-dire que ses bases étaient des carrés de 6^{po} de côté. On la partageait en 6 parties

égales appelées *pieds de solive*; le pied de solive valait 12 *pouces de solive*, le pouce de solive contenait 12 *lignes de solive*, et la ligne, 12 *points*.

Il y avait dans l'ancien système de mesures et il y a encore aujourd'hui pour les mesures usuelles dérivées du mètre, la toise-toise-pied, la toise-toise-pouce, la toise-toise-ligne. Ce sont des prismes carrés qui ont, comme l'indiquent leurs noms, une toise carrée pour base et un pied ou un pouce ou une ligne pour hauteur.

Le bois de chauffage se mesurait à la *corde*, et il se mesure encore de même dans un grand nombre de localités. La corde la plus usitée est un prisme carré de 4 pieds d'écarrissage sur 8 pieds de long. On le divise en moitiés, quarts, huitièmes, seizièmes et trente-deuxièmes de corde.

Les unités des anciennes mesures de capacité dérivaient du pied cube et du pouce cube, mais ce n'était ni des cubes, ni des prismes carrés. Elles variaient tellement d'un lieu à un autre, et par suite le nombre en était si grand, qu'il serait à-peu-près inutile d'en citer quelques-unes. Il suffira d'ailleurs, pour pouvoir les employer avec les méthodes de mesurage qui vont être enseignées, de connaître leurs valeurs en pieds cubes ou en pouces cubes.

204. Le cube qui sert à mesurer les volumes, selon le système décimal, se nomme *millimètre cube*, si l'arête est d'un millimètre; *centimètre cube*, si l'arête a un centimètre; *décimètre cube* ou *litre*, si l'arête est d'un décimètre; *mètre cube* ou *stère*, si l'arête a un mètre.

Les dixièmes, centièmes, millièmes, etc., du mètre cube, sont des prismes carrés qui ont un mètre carré de base et un décimètre, ou un centimètre, ou un millimètre, etc., de hauteur (200).

Les subdivisions du litre sont le *décilitre* ou dixième et le *centilitre* ou centième; les composés sont le *décalitre* ou dixaine, l'*hectolitre* ou centaine.

Le stère n'a pas d'autres subdivisions que le *décistère* ou dixième, ni d'autre composé que le *décastère* ou dixaine.

205. Un prisme rectangle quelconque contient l'unité de mesure prismatique ou cubique, autant de fois que l'indique le produit de la superficie de sa base multipliée par sa hauteur ou longueur. En effet, supposons que cette longueur A'A'' donnée par l'élévation A'A''B''B' du prisme (P. III, F. 54), contienne 4 fois la hauteur de l'unité de mesure. Si nous coupions le corps à tous les points de divi-

sion et parallèlement à la base, il se trouverait décomposé en 4 prismes rectangles qui auraient des bases égales, des hauteurs égales et par suite même volume (200). Tous contiendraient donc l'unité de mesure le même nombre de fois, et il suffirait de multiplier ce nombre de fois par le nombre 4 de ces petits prismes, pour avoir la mesure du grand. Or, le premier A'A'''B'''B' contiendrait l'unité de mesure autant de fois que sa base, qui est la base ABCD du grand prisme, pourrait recevoir la base carrée de cette unité, c'est-à-dire autant de fois que le marque la superficie de ABCD (123). Donc, pour connaître le volume d'un prisme rectangle, il faut multiplier la superficie de la base, mesurée avec la base de l'unité de volume, par la hauteur, mesurée avec celle de la même unité. Cette superficie est ici 35 et le volume est par conséquent $35 \times 4 = 140$.

Comme la superficie de la base ABCD est égale au produit des 7 unités de AB largeur du prisme, multipliées par les 5 unités de l'épaisseur AD, on peut dire aussi que *le volume de tout prisme rectangle égale le produit de sa largeur, de son épaisseur et de sa hauteur*, mesurées avec la largeur, l'épaisseur et la hauteur de l'unité de volume. De là cette formule $V.P.R = L \times E \times H$, dans laquelle V.P.R signifie *volume prismatique rectangle.*

Ainsi, lorsque vous voudrez mesurer un prisme rectangle en mètres cubes, vous mesurerez les trois dimensions avec le mètre, vous multiplierez deux des longueurs l'une par l'autre, puis le produit par la 3e. Lorsqu'il faudra mesurer en toise-toise-pieds, vous prendrez en toises les deux dimensions de la base du prisme, et vous multiplierez leur produit par la hauteur exprimée en pieds.

206. Il suit de là que la toise cube, cas particulier du prisme rectangle, contient 216 pieds cubes, car $6 \times 6 \times 6 = 216$; que le pied cube vaut 1728 pouces cubes, car $12 \times 12 \times 12 = 1728$; que le pouce cube égale 1728 lignes cubes; que le mètre cube renferme 1000 décimètres cubes, puisque $10 \times 10 \times 10 = 1000$; que le décimètre cube se compose de 1000 centimètres cubes, et que le centimètre cube vaut 1000 millimètres cubes.

Vous voyez aussi que la solive égale 5 pieds cubes (203), puisque $6^{po} \times 6^{po} \times 12^{pi} = \frac{1}{2}^{pi} \times \frac{1}{2}^{pi} \times 12^{pi} = \frac{1}{4}^{pi} \times 12^{pi} = \frac{12}{4}^{pi\,c}$; concluez-en que la solive est contenue dans la toise-cube autant que $3^{pi.c}$ dans $216^{pi.c}$, ou 72 fois. La toise-toise-pied, qui est $\frac{1}{6}$ de la toise-cube, vaut de même 72 fois le pied de solive qui est $\frac{1}{6}$ de la solive; la toise-toise-pouce,

douzième de la toise-toise-pied, contient 72 fois le pouce de solive, douzième du pied de solive; et enfin la toise-toise-ligne, douzième de la toise-toise-pouce, comprend 72 fois la ligne de solive, douzième du pouce de solive.

207. *Mesurer un prisme rectangle en mètres cubes et parties décimales.*

Supposons que la longueur soit $15^m,35$, que la largeur soit $7^m,15$ et que l'épaisseur ait $2^m,328$. La formule du n°205 vous donnera $V.P.R = 7^m,15 \times 2^m,328 \times 15^m,35 = 16^{mm},6452 \times 15^m,35 = 255^{mc},503\,82$. L'abréviation *mc* signifie *mètres cubes*.

208. *Mesurer un prisme rectangle en mètres cubes et parties cubiques.*

Faites les mêmes opérations que dans le cas précédent, et partagez les décimales du dernier produit en groupes de 3 chiffres chacun, à partir de la virgule. Le dernier groupe à droite pourra se trouver incomplet; vous le compléterez en écrivant un ou deux zéros à la suite.

On voit ainsi que le prisme rectangle dont le volume est de $255^{mc},503\,82$, contient 255 mètres cubes, 503 décimètres cubes et 820 centimètres cubes (206). Ce second mode de mesurage est moins usité que le premier.

209. *Jauger un prisme rectangle en litres.*

On dit ordinairement *jauger*, *jaugeage*, quand il s'agit de mesurer un volume creux, une capacité. Pour résoudre le problème proposé, agissez comme si vous vouliez mesurer en mètres cubes, et reculez la virgule de 3 rangs vers la droite; vous aurez des litres pour unités principales, puisque le litre vaut un décimètre cube et que le décimètre cube est le millième du mètre cube (204 et 206).

Ainsi, un prisme rectangle creux qui aurait $4^m,256$ de hauteur, 2^m de largeur et $1^m,004$ d'épaisseur, serait en volume de $8^{mc},546\,048$ et contiendrait $8\,546^l,048$, à peu près 8 546 litres et 5 centilitres.

210. *Jauger un prisme rectangle en hectolitres.*

Opérez comme s'il s'agissait de mesurer en mètres cubes et reculez la virgule d'un seul rang vers la droite; vous aurez des hectolitres pour unités principales, puisque l'hectolitre vaut 100 litres et que pour les litres il faut reculer la virgule de 3 rangs.

Le vase de l'exemple précédent contiendrait donc $85^{hl},460\,48$ ou environ 85 hectolitres, 46 litres et 5 centilitres.

211. *Le mesurage en stères doit se faire absolument comme le mesurage en mètres cubes*, puisque ces deux unités sont égales.

Pour *mesurer une pièce de bois carré en décistères*, il faut opérer comme si l'on voulait obtenir des mètres cubes et reculer la virgule d'un rang à droite, car le décistère est le dixième du stère. On se borne ordinairement aux millièmes de décistère dans ce mesurage.

212. *Mesurer un prisme rectangle en toises cubes et parties prismatiques.*

Vous mesurerez chacune des trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions, puis vous ferez le produit de ces trois nombres, au moyen de deux multiplications complexes. Dans la première, il faudra regarder le multiplicande comme exprimant des toises carrées, toise-pieds, etc.; le produit donnera la superficie d'une des faces prise pour base (129). Dans la seconde, ce produit qui sera multiplicande, devra être considéré comme un nombre de toises cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., et le 2e produit fera connaître en pareilles unités le volume du prisme. Ces opérations ne présenteront aucune difficulté à ceux qui auront l'habitude de la multiplication complexe ordinaire et qui se rappelleront que les toises carrées et leurs parties rectangulaires, les toises cubes et leurs parties prismatiques se contiennent comme les toises linéaires, les pieds, les pouces et les lignes (203).

213. *Mesurer un prisme rectangle en toises cubes et parties cubiques.*

Mesurez les trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions, réduisez ces longueurs en unités de la plus petite espèce qu'elles contiennent, en lignes par exemple : le produit des trois nombres de lignes vous donnera en lignes cubes, le volume du prisme. Alors, il faudra chercher par la division, combien ce nombre contient de fois 1728^{lc}, valeur d'un pouce cube (206); le reste donnera les lignes cubes du prisme, et le quotient exprimera des pouces cubes. Ce quotient divisé par $1728^{po.c}$, valeur d'un pied cube, donnera pour reste les pouces cubes du prisme, et pour second quotient un nombre de pieds cubes. Le 2e quotient divisé par $216^{pi.c}$, valeur d'une toise cube, donnera pour reste les pieds cubes du prisme et pour 3e quotient les toises cubes. Ecrivant donc à la suite de ce 3e

quotient, successivement les trois restes, en commençant par le dernier, vous aurez le volume en toises cubes, pieds cubes, pouces cubes et lignes cubes. Cette méthode est analogue à celle du n° 128, et n'en diffère que par les diviseurs.

214. *Mesurer une pièce de bois carré en solives.*

Mesurez les trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions; multipliez-en une par 6, une autre par 6 et la 3e par 2; puis faites le produit des trois longueurs ainsi modifiées, comme s'il fallait obtenir des toises cubes et des parties prismatiques de la toise cube (212). Le produit exprimera des solives au lieu de toises cubes, des pieds de solive au lieu de toise-toise-pieds, des pouces de solive au lieu de toise-toise-pouces; des lignes de solive au lieu de toise-toise-lignes, et des points de solive au lieu de toise-toise-points; car en multipliant deux dimensions par 6 et la 3e par 2, c'est comme si vous eussiez fait d'abord le produit des trois et que vous l'eussiez multiplié ensuite par 72 qui vaut $6 \times 6 \times 2$; or il faut multiplier la toise cube et ses parties primastiques par 72, pour les convertir en solives et parties de solive (206).

215. *Corder une pile de bois de chauffage qui forme un prisme rectangle.*

Comme la largeur de cette pile égale la longueur des bûches, elle est la même que la largeur de la corde. Or la largeur d'un prisme rectangle peut être prise pour sa hauteur. La pile et la corde ont donc même hauteur et se contiennent comme leurs bases (200), c'est-à-dire, comme les produits des longueurs par les épaisseurs. Mesurez donc la longueur horizontale et l'épaisseur verticale de la pile en pieds; multipliez ces deux dimensions et divisez le nombre de pieds carrés que donne le produit, par 32, nombre des pieds carrés d'une grande face de la corde. Vous aurez pour quotient, la quantité de cordes de la pile.

Si la pile n'avait comme la corde que 4 pieds d'élévation, elle serait aussi un prisme carré; les deux prismes étant terminés à chaque bout par des carrés égaux, se contiendraient comme leurs longueurs, et il suffirait de prendre le huitième de la longueur de la pile exprimée en pieds, pour connaître le nombre de cordes.

216. *Mesurer un cube.*

Appliquant ce qui a été dit du prisme rectangle, dont le cube n'est qu'un cas particulier, vous verrez qu'il faut

faire le quarré de la longueur de l'arête et multiplier ce quarré par cette même longueur. Si donc l'arête AB du cube de la figure 31 (P. III), a 8^m, le volume de ce corps vaudra $64^{mm} \times 8^m = 512^{mc}$.

Un produit qui résulte, comme 512, de deux multiplications où le même nombre forme le premier multiplicande et les deux multiplicateurs, est appelé le *cube* de ce nombre. On peut donc dire que le *volume d'un cube égale le cube numérique de l'arête.* De là cette formule $V.C = A \times A \times A$.

Il est bon de savoir par cœur les cubes des douze premiers nombres; les voici :

Nombres:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12.
Cubes:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000,	1331,	1728.

Vous verrez aisément qu'en effet 343, par exemple, est le produit de 49 quarré de 7, multiplié par 7, ou, ce qui revient au même, que $343 = 7 \times 7 \times 7$.

217. *Cuber un prisme quelconque.*

Imaginez un prisme rectangle qui ait même hauteur et même superficie de base que le prisme quelconque; les deux corps seront équivalens (200). Par conséquent, le volume du prisme quelconque égalera le produit de la base du prisme rectangle multipliée par la hauteur commune (205). Mais, on aurait le même produit en multipliant par la hauteur commune, la superficie de la base du prisme quelconque, puisqu'elle égale la superficie de la base du prisme rectangle. *On trouve donc le volume de tout prisme, en multipliant la superficie de la base par la hauteur*, et la formule du calcul est $V.P = B \times H$.

Ainsi, pour cuber une pièce de bois de charpente qui aurait la forme et la position du prisme triangulaire oblique de la figure 33 (P. III), vous calculeriez la superficie de la base ABC en mètres carrés, par exemple (137), et vous la multiplieriez par la longueur de E'H prise en mètres, au moyen du fil-à-plomb. Le produit serait le volume de la pièce en mètres cubes; mais vous le convertiriez aisément en décistères (211).

S'il fallait déterminer la capacité d'un grenier à fourrage dont la forme fût celle d'un prisme triangulaire et droit, vous mesureriez la superficie d'un des pignons triangulaires et vous la multiplieriez par la distance horizontale de ces pignons, laquelle est la hauteur du prisme.

218. *Corder une pile de bois de chauffage qui a 4 pieds*

d'élévation, dont un des bouts est vertical et l'autre en talus.

C'est un semblable prisme qu'on forme, pour corder le bois à la porte de l'acheteur. Il contient la corde autant que son trapèze contient un rectangle de 8^{pi} sur 4^{pi} (200). Or, le trapèze a aussi 4^{pi} de hauteur; il contient donc le rectangle autant de fois que la demi-somme de ses deux bases contient 8^{pi} (123 et 139). Au lieu de mesurer les deux bases, le cordeur mesure, pour abréger, l'arête AB du talus (P. III, F. 35); il en marque le milieu C, abaisse à vue une perpendiculaire CD, sur la base inférieure BE, et mesure DE: cette longueur divisée par 8, donne les cordes. Si, par exemple, DE$=35^{pi}$ 8 ° ou $35^{pi}\frac{2}{3}$, le nombre des cordes de la pile est $\frac{35}{8}+\frac{2}{3\times 8}=4^{c}+\frac{3}{8}+\frac{2}{24}=4^{c}+\frac{11}{24}$.

Il est facile de voir qu'en effet DE vaut la demi-somme des bases BE, AF; car si l'on prolonge AF jusqu'à la rencontre de CD, AG=BD, puisque AC=CB (67); donc FA+AG+ED=FA+BD+ED=FA+EB. Mais FA+AG ou FG=ED, ce sont des parallèles comprises entre parallèles (66); par conséquent ED+ED=FA+EB ou bien ED est la moitié de FA+EB.

Si la pile de bois se terminait par deux talus, il faudrait marquer aussi le milieu du talus de gauche, abaisser à vue une seconde perpendiculaire sur la grande base du trapèze et diviser par 8 l'intervalle des deux perpendiculaires.

219. *Cuber un tronc de prisme triangulaire.*

Mesurez en mètres carrés la superficie de la base ABC (P. III, F. 36); mesurez en mètres les arêtes A'A'', B'B'', C'C'', si le tronc est droit; additionnez ces longueurs et prenez le tiers de la somme, pour connaître la moyenne. Vous aurez le volume du tronc de prisme triangulaire et droit en mètres cubes, si vous multipliez la superficie de la base, par la moyenne des trois arêtes parallèles.

Dans le cas où le tronc de prisme serait oblique, vous multiplieriez la base par la moyenne des 3 perpendiculaires abaissées de A'', B'', C'', sur le plan de cette base.

Il s'ensuit que *le volume d'un tronc de prisme triangulaire quelconque égale la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux trois sommets de la troncature.* La formule de ce principe est $V.T.P.T=B\times\frac{D+D'+D''}{3}$, les trois distances étant représentées par D, D', D''.

220. *Cuber un tronc de parallélipipède.*

Ce mesurage est analogue au précédent : il faut multiplier la superficie de la base ABCD (P. III, F. 37), par la moyenne des quatre arêtes parallèles A'A'', B'B'', C'C'', D'D'', lorsque le tronc est droit.

Si le tronc de parallélipipède était oblique, vous devriez multiplier la base, par la moyenne des 4 perpendiculaires abaissées de A'',B'',C'',D'' sur le plan de cette base.

Par conséquent, *le volume d'un tronc de parallélipipède quelconque égale la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux quatre sommets de la troncature.* Vous avez donc pour formule $V.T.Pa = B \times \frac{D+D'+D''+D'''}{4}$.

On mesure aussi de la même manière, dans certains cas, le volume des prismes complets : il est aisé de voir en effet que multiplier la base inférieure, par la hauteur du prisme (217) ou par la moyenne des distances de cette base aux sommets de la base supérieure, c'est alors absolument la même chose, puisque chacune de ces distances est égale à la hauteur.

PYRAMIDES.

221. La face d'où partent toutes les arêtes concourantes d'une pyramide, en est la *base* (194) ; cette base peut être un polygone quelconque.

Le point où se coupent toutes les arêtes concourantes, est le *sommet* de la pyramide, et la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le plan de la base, est la *hauteur* du corps. Les faces latérales, qui vont de la base au sommet, sont nécessairement des triangles.

La pyramide est *complète*, si elle contient le sommet ; elle est *tronquée*, lorsqu'au lieu du sommet, c'est une face plane qui se trouve opposée à la base. La pyramide tronquée a deux bases, quand la troncature est parallèle à la face opposée ; les faces latérales sont alors des trapèzes.

Une pyramide est *régulière*, lorsqu'elle a pour base un polygone régulier et que son *axe*, c'est-à-dire la droite qui joint le sommet au centre de la base (141), est perpendiculaire sur le plan de cette base. Si ces deux conditions ne sont pas remplies à la fois, la pyramide est *irrégulière.*

Toutes les arêtes concourantes d'une pyramide régulière sont égales ; car ce sont des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à la base (60).

On distingue les pyramides, comme les prismes, par les noms des polygones de leurs bases; elles sont *triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, hexagonales*, etc., selon qu'elles ont pour base un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc.

222. *Dessiner une pyramide régulière et complète.*

Le plan comprend un polygone régulier ABCDEF semblable ou égal à celui de la base (P. III, F. 38); le centre S de ce polygone représente le sommet de la pyramide, sur le plan horizontal, et les rayons SA, SB, etc., y représentent les arêtes concourantes.

Pour faire l'élévation, abaissez de S et de tous les sommets A, B, C, etc. du polygone, des perpendiculaires sur la ligne de terre; prenez S'S'' égale à la hauteur ou à l'axe, et joignez le point S'' aux points A', B', etc. Si le rayon AS est parallèle à YZ, la droite A'S'' donnera la longueur de chaque arête.

223. *Dessiner une pyramide irrégulière.*

Le plan comprend toujours un polygone ABCD égal ou semblable à la base (P. III, F. 39). Si, à l'aide d'un fil-à-plomb, vous avez pris les distances horizontales du sommet de la pyramide à deux sommets B, D de la base, vous pourrez, avec ces longueurs, marquer le sommet S sur le plan horizontal. Les droites AS, BS, CS, DS y représenteront les arêtes concourantes.

Pour faire l'élévation, abaissez de tous les points du plan, des perpendiculaires sur la ligne de terre; prenez S'S'' égale à la hauteur de la pyramide, et joignez le point S'' aux points A', B', C', D'. Les droites que vous tirerez ainsi, représenteront les arêtes concourantes, sur le plan vertical; mais il est possible qu'aucune ne soit représentée dans sa vraie grandeur. Cependant, comme je vous l'ai annoncé, le dessin complet d'un corps peut toujours en donner exactement les différentes dimensions.

Voulez-vous, par exemple, avoir la vraie longueur de l'arête qui va de C au sommet? il suffira de porter sur la ligne de terre, de S' en E, la droite CS du plan, et de tirer S''E; cette hypothénuse du triangle rectangle ES'S'' donnera la longueur cherchée. Pour les autres, vous agiriez d'une manière analogue.

224. *Dessiner un tronc de pyramide régulière, à bases parallèles.*

Le plan se compose de deux polygones réguliers, con-

centriques, égaux ou semblables aux bases, et de droites A*a*, B*b*, etc. (P. III, F. 40), qui joignent les sommets correspondans des polygones. Ces droites représentent les arêtes concourantes, sur le plan horizontal.

L'élévation doit offrir un trapèze dont les côtés parallèles soient éloignés l'un de l'autre autant que les bases du tronc de pyramide. On détermine ce trapèze en abaissant des perpendiculaires sur la ligne de terre, des points A, C jusqu'à cette droite, et des points *a*, *c*, jusqu'à sa parallèle *a'c'*. Si, comme dans la figure, deux côtés AF CD de la grande base sont perpendiculaires à la ligne de terre, les droites A' *a'*, C' *c'* représentent chacune deux arêtes concourantes, sur le plan vertical. Par le même moyen, on trace la droite B'*b'* qui représente les deux autres. Le dessin n'a aucune ligne pointillée, attendu que toutes les lignes cachées de l'élévation se confondent avec des lignes vues, par suite de la position donnée arbitrairement au tronc de pyramide.

Comparaison des pyramides.

225. *Deux pyramides triangulaires sont égales, si leurs arêtes correspondantes ont même longueur, ou bien si trois faces de l'une sont égales à trois faces de l'autre.* Alors, la première étant creuse pourrait contenir exactement la seconde.

Deux pyramides régulières sont égales, lorsqu'il y a égalité entre les bases et entre les hauteurs ou deux arêtes concourantes prises chacune sur un des corps.

Deux pyramides irrégulières sont égales, s'il y a égalité entre leurs bases et si trois arêtes concourantes qui se suivent, ont dans l'une mêmes longueurs que leurs correspondantes dans l'autre.

226. *Deux pyramides qui ont des bases de même superficie et des hauteurs égales, sont équivalentes.* La démonstration est analogue à celle du n° 107.

Lorsque l'on coupe un prisme triangulaire en passant par le point D et par la droite BC (P. III, F. 53), on en détache une pyramide triangulaire DABC qui a même hauteur E'H et même base ABC que le prisme. Si ensuite on coupe le polyèdre restant, en passant par le même point D et par la droite CE, on forme une seconde pyramide triangulaire DCEF ou CDEF qui, ayant son sommet au point C et pour base le triangle DEF, a aussi,

même hauteur et même base que le prisme. Le reste est une 3e pyramide triangulaire DBCE équivalente à chacune des deux premières, car on peut la changer en une autre de même volume qui ait aussi même base et même hauteur que le prisme. En effet, DBCE équivaut à la pyramide dont A serait le sommet et BCE la base, puisque AD est parallèle à la face BCFE; mais la pyramide ABCE étant retournée, aurait E pour sommet et ABC pour base. Par conséquent, le volume d'un prisme triangulaire égale 3 fois celui d'une pyramide triangulaire qui aurait même base et même hauteur, ou bien *le volume d'une pyramide triangulaire est le tiers de celui d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

227. Il s'ensuit que les pyramides triangulaires sont entre elles comme les prismes triangulaires dont elles seraient le tiers: si l'un des prismes est double, triple, etc., de l'autre, le tiers du premier se trouve nécessairement double, triple, etc., de celui du second. Par conséquent, *deux pyramides triangulaires dont les bases sont de même superficie, se contiennent comme leurs hauteurs, et deux pyramides triangulaires de même hauteur, se contiennent comme leurs bases* (200).

Ces relations s'étendent à deux pyramides quelconques, car si vous coupez ces corps en passant par le sommet et par les diagonales qui divisent la base en triangles, vous les partagerez en pyramides triangulaires, et ils seront entre eux comme les sommes de leurs parties. Or, ces deux sommes de pyramides triangulaires sont évidemment entre elles comme les sommes des bases, s'il y a égalité dans les hauteurs, ou comme les hauteurs des deux pyramides quelconques, si les sommes des bases sont égales. Ainsi, dans ces cas, il n'est pas nécessaire de mesurer les pyramides pour les comparer; il suffit de comparer les hauteurs, si les bases se trouvent équivalentes, ou les bases, si les hauteurs se trouvent égales.

Mesurage des pyramides.

228. Il est possible qu'on ait besoin de connaître la surface d'une pyramide. Rien n'est plus facile; l'opération consiste à mesurer successivement la base et chaque face triangulaire, et à faire la somme de toutes leurs superficies.

229. *Cuber une pyramide triangulaire.*

Mesurez la base en mètres carrés, par exemple, et la hauteur en mètres; puis faites le produit des deux nombres trouvés; vous aurez en mètres cubes le volume d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur que la pyramide (217). Or, d'après le n° 226, le volume cherché est le tiers de celui-là; donc, *pour cuber une pyramide triangulaire, il faut prendre le tiers du produit de la superficie de la base multipliée par la hauteur.*

230. *Cuber une pyramide quelconque.*

Si vous coupiez la pyramide de la figure 38 (P. III) en passant par le sommet S'' et successivement par les diagonales AD, BE, CF de la base, vous la diviseriez en six pyramides triangulaires qui auraient même hauteur S''S' que la pyramide hexagonale, et pour bases, les triangles ASB, BSC, etc.; la somme des volumes de ces six pyramides donnerait évidemment le volume demandé. Or chacun est égal au tiers du produit d'un des triangles ASB, BSC, etc., multiplié par la hauteur commune S''S'; leur somme est donc le tiers du produit de la somme des triangles multipliée par S''S', et puisque la somme des triangles ASB, BSC, etc., forme la base de la pyramide donnée, il est clair que *le volume de cette pyramide est égal au tiers du produit de la superficie de la base multipliée par la hauteur,* comme celui d'une pyramide triangulaire.

Si donc B représente la superficie de la base d'une pyramide quelconque, et H la hauteur, le volume sera exprimé par la formule $V.Py=\frac{B\times H}{3}$. Supposez que $B=12^{mm}$ et que $H=2^{m},15$; cette formule vous donnera $V.Py=\frac{12^{mm}\times 2^{m},15}{3}=\frac{25^{mc},80}{3}=8^{mc},60$.

Il est visible que ce mesurage confirme les principes du n° 227.

231. *Cuber un tronc de pyramide à bases parallèles.*

Il faut multiplier la grande base par la longueur d'un quelconque de ses côtés, multiplier la petite base par le côté correspondant, multiplier la différence des deux produits par la hauteur du tronc, et diviser enfin le troisième produit par le triple de la différence des deux côtés.

Soient B, *b* les superficies des bases ABCDEF, *abcdef* régulières ou irrégulières (P. III, F. 40); C, *c* les longueurs

des côtés correspondans AF, *af*, par exemple, et H la hauteur B'*b'* du tronc droit ou oblique. La formule du mesurage est $V.T.Py = \frac{(B \times C - b \times c) \times H}{3(C-c)}$.

En effet, le tronc est l'excès de la grande pyramide S'ABCDEF sur la petite S'*abcdef*, c'est-à-dire (230) l'excès de $\frac{B \times H'}{3}$ sur $\frac{b \times h'}{3}$, si H', *h'* représentent les hauteurs S'B', S'*b'*.

Or, à cause du parallélisme des bases, le plan S'SA qui renferme les concourantes projetées en S'B', S'A', coupe ces bases selon deux parallèles, et ces parallèles divisent les deux concourantes de la même manière. Par conséquent, H' et H se contiennent comme S'A', *a'*A'. Les côtés AF, *af* sont aussi parallèles et divisent les deux arêtes projetées en SA, SF, S'A'. Conséquemment, S'A', S'*a'* se contiennent comme C, *c*, et S'A', S'A'—S'*a'* ou *a'*A' se contiennent comme C, C—*c*. Par suite, H', H se contiennent comme C, C—*c*, ce qui donne $H' = \frac{C \times H}{C-c}$.

Pour les mêmes raisons, *h'*, H se contiennent comme S'*a'*, *a'*A', et ces deux dernières longueurs se contiennent comme *c*, C—*c*. Donc, *h'*, H se contiennent aussi comme *c*, C—*c*, ce qui donne $h' = \frac{c \times H}{C-c}$.

Ainsi, le volume de la grande pyramide $\frac{B \times H'}{3} = \frac{B \times C \times H}{3(C-c)}$, le volume de la petite $\frac{b \times h'}{3} = \frac{b \times c \times H}{3(C-c)}$, et le tronc vaut $\frac{B \times C \times H - b \times c \times H}{3(C-c)} = \frac{(B \times C - b \times c) \times H}{3(C-c)}$.

Supposons $B = 64^{mm},94$, $b = 10^{mm},39$, $C = 5^m$, $c = 2^m$ et $H = 3^m$; on aura $V.T.Py = \frac{(64^{mm},94 \times 5^m - 10^{mm},39 \times 2^m) \times 3^m}{3(5^m - 2^m)} = \frac{324^{mc},7 - 20^{mc},78}{3} = \frac{303^{mc},92}{3} = 101^{mc},306$

CORPS RONDS.

Les corps ronds dont nous allons nous occuper, sont ceux que déjà vous savez dessiner et dont vous avez appris précédemment à mesurer les surfaces. Reste donc à vous enseigner les moyens d'en comparer et d'en mesurer les volumes.

COMPARAISON ET MESURAGE DES CORPS RONDS.

232. Il résulte du n° 172 que le cylindre est un prisme

dont les faces latérales sont extrêmement nombreuses, et le n° 181 montre que le cône est au fond une pyramide qui a une multitude de faces triangulaires. On peut donc dire de deux cylindres et de deux cônes, comme de deux prismes et de deux pyramides (200 et 227), qu'*ils se contiennent autant de fois que leurs bases, s'ils ont même hauteur, ou autant de fois que leurs hauteurs, si leurs bases sont équivalentes.*

233. *Cuber un cylindre quelconque.*

Il faut multiplier la superficie de la base par la hauteur, après avoir mesuré les longueurs nécessaires avec la même unité; car tel est le mesurage d'un prisme (217).

Si donc R est le rayon d'un cylindre circulaire et H la hauteur, on a pour formule $V.Cy = R \times R \times 3,1416 \times H$, puisque (155) la superficie de la base est alors $R \times R \times 3,1416$.

Quand, au lieu du rayon, on veut employer le diamètre, la formule devient $V.Cy = \frac{D}{2} \times \frac{D}{2} \times 3,1416 \times H$ ou $V.Cy = \frac{D \times D \times 3.1416 \times H}{4}$.

Les mesures de capacité pour les matières sèches et pour le lait, sont des cylindres creux dont la hauteur H égale le diamètre D, et ce diamètre est, pour le décalitre, par exemple, de $0^m,2335$. Il est facile de reconnaître qu'en effet cette dimension est juste à fort peu près, car la capacité est alors le quart du cube de $0^m,2335$ multiplié par 3,1416, ce qui donne 9 litres, plus 0,991384497 5, quantité dont la différence à 10 litres est seulement 0,0086155025.

Les mesures de capacité pour les liquides, l'huile et le lait exceptés, sont des cylindres creux dont la hauteur est double du diamètre; celui du litre doit avoir $0^m,086$. En effet, la capacité de la mesure égale la moitié du cube de $0^m,086$ multiplié par 3,1416, ce qui donne $0^{lit},9991167648$, quantité dont la différence à un litre est seulement 0,0008832352.

234. *Cuber un tronc de cylindre droit qui a un axe.*

Un cylindre tronqué a un axe, quand sa base et sa troncature ont chacune un centre, c'est-à-dire un point situé au milieu de toutes les cordes qui le contiennent: il n'est pas nécessaire que ces cordes soient de même longueur, comme les diamètres du cercle; peu importe leur inégalité; pourvu que leurs milieux se confondent tous avec le point où elles se croisent, ce point est un centre, et la droite qui joint celui

de la base à celui de la troncature, est un axe. Par conséquent, certaines ovales ont un centre, comme le cercle, et certains cylindres oblongs ont un axe, comme le cylindre circulaire.

Si vous pouvez mesurer l'axe d'un tronc de cylindre quelconque, mais droit, *vous aurez le volume en multipliant la superficie de la base, par la longueur de cet axe.* La formule à suivre est $V.T.Cy=B\times A$, la base étant représentée par B et l'axe par A.

Pour le tronc de cylindre circulaire de la figure 22 (P. III), vous devriez multiplier la superficie du cercle A, par A'A''. Cela vous donnerait le volume d'un cylindre complet dont la hauteur serait A'A'' (233), et en effet ce volume égale celui du tronc, attendu que ce qu'il a de moins, à gauche de A'A'', est compensé par ce qu'il a de trop, à droite.

Si vous ne pouvez mesurer l'axe, à cause de l'impossibilité d'atteindre au centre de la troncature, *vous aurez le volume du tronc de cylindre droit, en multipliant la superficie de la base, par la moyenne de la plus grande et de la plus petite des droites de la surface cylindrique.* Il faudra donc employer la formule $V.T.Cy=B\times\frac{G+P}{2}$, la plus grande des droites étant représentée par G et la plus petite par P.

Effectivement, l'axe A'A'' du tronc de cylindre circulaire égale la demi-somme de BC et DE, côtés parallèles du trapèze BCDE; car contenant le centre A de la base et le centre A'' de la troncature, il passe par le milieu du diamètre BE et par le milieu de CD (218).

235. *Cuber un manchon cylindrique.*

Calculez le volume du grand cylindre dont le diamètre est BE (P. III, F. 23), et le volume du petit qui a FI pour diamètre; puis retranchez ce dernier volume du premier; la différence sera le volume de la paroi cylindrique du corps.

Un puits doit avoir $1^m,62$ de diamètre, 12^m de profondeur et des parois de $0^m,64$ d'épaisseur. Combien faudra-t-il de mètres cubes de pierres pour le construire?

Le grand cylindre aura en diamètre $1^m,62+0^m,64\times2=2^m,90$; son volume sera donc $\frac{2^m,90\times2^m,90\times3,1416\times12^m}{4}=79^{mc},263$. Le volume du vide ou petit cylindre sera $\frac{1^m,62\times1^m,62\times3,1416\times12^m}{4}=24^{mc},734$, et par conséquent, la paroi du puits contiendra $79^{mc},263-24^{mc},734=54^{mc},529$.

236. *Cuber un cône quelconque.*

On doit prendre le tiers du produit de la superficie

de la base, multipliée par la hauteur, car tel est le mesurage d'une pyramide (230), et d'après le n° 181, le cône est une pyramide dont les faces latérales sont très-nombreuses et très-étroites, même à la base.

Représentant par R le rayon d'un cône circulaire, et par H la hauteur, vous aurez donc pour formule $V.\ C\hat{o}=\frac{R\times R\times 3,1416\times H}{3}$. Le diamètre D vous donnerait $V.\ C\hat{o}=\frac{D\times D\times 3,1416\times H}{12}$.

237. *Cuber un tronc de cône à bases parallèles.*

Le mesurage du tronc de pyramide est applicable (231); seulement au lieu des côtés C, c, il faut employer des cordes correspondantes ou les rayons R, r des bases, quand le tronc de cône est circulaire : ces rayons sont évidemment proportionnels aux cordes correspondantes, et conséquemment $\frac{C}{C-c}=\frac{R}{R-r}$, $\frac{c}{C-c}=\frac{r}{R-r}$. Comme d'ailleurs (155) la grande base $B=R\times R\times 3,1416$, et que $b=r\times r\times 3,1416$, la formule donne $V.T.C\hat{o}=\frac{(R\times R\times 3,1416\times R-r\times r\times 3,1416\times r)H}{3(R-r)}=\frac{(R\times R\times R-r\times r\times r)\times 3,1416\times H}{3(R-r)}$.

Or, il est facile de s'assurer en multipliant le quotient par le diviseur, que $\frac{R\times R\times R-r\times r\times r}{R-r}=R\times R+R\times r+r\times r$. La formule du mesurage du tronc de cône est donc aussi $V.T.\ C\hat{o}=H\times 3,1416\times\frac{R\times r+R\times R+r\times r}{3}$.

Ainsi, *pour avoir le volume d'un tronc de cône circulaire à bases parallèles, on peut multiplier la différence des cubes numériques des rayons, par* 3,1416, *puis le produit par la hauteur, et diviser ce second produit par le triple de la différence des rayons*, ou bien *le même volume égale le tiers du produit fait avec la hauteur, le nombre* 3,1416 *et le produit des rayons des bases ajouté à la somme de leurs quarrés numériques.*

Soient 3^m le grand rayon R d'une cuve en tronc de cône, $2^m,75$ le petit r, et $2^m,80$ la profondeur H, vous aurez $V.T.C\hat{o}=2^m,80\times 3,1416\times\frac{3^m\times 2^m,75+9^{mm}+7^{mm},5625}{3}=2^m,80\times 3,1416\times\frac{24^{mm},8125}{3}=2^m,80\times\frac{77^{mm},95095}{3}=\frac{218^{mc},26266}{3}=72^{mc},75422=727,54$ hectolitres (210).

Les arbres en grume, c'est-à-dire ceux qui, dépouillés de leurs branches, se trouvent prêts à être écarris, sont des troncs de cônes, lorsqu'ils sont bien droits. Cependant, on ne les cube pas comme il vient d'être enseigné, attendu que ce mesurage ferait payer l'écorce et l'aubier qui ne sont bons qu'à brûler.

Pour connaître le nombre des décistères qui seront contenus dans la pièce de bois carré que fournira un arbre en grume, on mesure en mètres les circonférences des deux bouts de l'arbre, à l'aide d'une ficelle, et ordinairement on prend les $\frac{5}{48}$ de leur somme. Le résultat est l'écarissage; il faut donc le multiplier par lui-même, multiplier le quarré obtenu, par la longueur de la pièce mesurée en mètres, et reculer la virgule d'un rang à droite (211).

L'artillerie emploie un mode de mesurage plus avantageux pour l'acheteur : au lieu de prendre les $\frac{5}{48}$ de la somme des circonférences extrêmes, elle n'en prend que le dixième ; l'écarissage qu'elle suppose est donc moindre que celui qui est usité entre particuliers : il en diffère d'une quantité égale à la 240e partie de la somme des circonférences extrêmes.

238. *Cuber un manchon conique.*

Calculez le volume du grand tronc de cône et celui du petit ; puis retranchez ce dernier du premier. La différence sera le volume de la paroi tronc-conique.

239. *Cuber une sphère.*

Une sphère peut être considérée comme composée d'une infinité de pyramides dont les très-petites bases couvrent la surface courbe, qui aient le centre pour sommet commun et le rayon pour hauteur commune. Or, la somme de toutes ces pyramides est évidemment égale au tiers du produit fait avec la somme de toutes les bases et la hauteur commune (230) ; donc *le volume d'une sphère vaut le tiers du produit de la surface multipliée par le rayon.*

Comme une surface sphérique est donnée par la formule $D \times D \times 3,1416$, si D représente le diamètre (188), ou par la formule $R \times R \times 3,1416 \times 4$, si R représente le rayon, il est clair que la formule du volume doit être $V. S = \frac{R \times R \times R \times 3,1416 \times 4}{3}$ ou $\frac{D \times D \times D \times 3,1416}{6}$. Vous voyez donc que *pour trouver le volume d'une sphère, il faut multiplier le cube du rayon par* 3,1416 *et prendre les* $\frac{4}{3}$ *du produit, ou multiplier le cube du diamètre par* 3,1416 *et prendre le sixième du produit.*

Quand il s'agit de déterminer le volume d'une paroi sphérique, c'est-à-dire le volume de la matière d'une sphère creuse, on calcule celui de la sphère limitée par la surface courbe extérieure et celui de la sphère limitée par la surface courbe intérieure; la différence des deux résultats donne le volume de la paroi sphérique.

240. Il suit des formules qui donnent le volume d'un corps sphérique, que *deux sphères se contiennent comme les cubes de leurs rayons ou comme les cubes de leurs diamètres.*

Si, par exemple, une boule a $0^m,05$ de diamètre et qu'une autre boule ait un diamètre de $0^m,15$, celle-ci contiendra la première autant de fois que 3375 cube de 15 contient 125 cube de 5, c'est-à-dire 27 fois.

241. *Cuber le volume d'une calotte sphérique.*

Calculez le volume du cylindre dont BD serait le diamètre et CE la hauteur (P. III, F. 28), puis le volume de la sphère dont CE serait le diamètre; ajoutez ce dernier volume à la moitié de celui du cylindre, et vous aurez pour somme le volume de la calotte ou le *segment sphérique* dont CE est la hauteur.

242. *Cuber le volume d'une zône sphérique.*

Calculez la superficie de la grande base dont FG est le diamètre (P. III, F. 28), et la superficie de la petite base dont BD est le diamètre; prenez la moitié de la somme de ces deux superficies; multipliez le résultat par la hauteur EH de la zône, et ajoutez au produit le volume de la sphère qui aurait EH pour diamètre. La somme sera le volume de la zône ou la *tranche sphérique* dont l'élévation est la figure BDFG.

243. *Cuber un anneau rond.*

Si l'on coupait un anneau et qu'on le redressât, on aurait un cylindre droit et complet dont la hauteur égalerait la circonférence moyenne de cet anneau; car la grande circonférence se raccourcirait et la petite s'allongerait; celle du milieu serait la seule qui ne varierait pas. Il faut donc, pour obtenir le volume (233), multiplier la superficie du cercle dont A'A'' est le diamètre (P. III, F. 29), par la moyenne des deux circonférences du plan. Cela revient à multiplier la somme des rayons de ces deux circonférences, par le quarré de la différence des mêmes rayons, à multiplier le produit par

le quarré de 3,1416 et à prendre le quart du résultat.

La formule d'un pareil mesurage est donc $V.A = \frac{(R+r)\times(R-r)\times(R-r)\times 3,1416\times 3,1416}{4}$.

Supposons, pour exemple, que la plus grande circonférence de l'anneau ait $0^m,33$ de rayon, et que le plus petit rayon du vide soit de $0^m,30$. On aura $V.A = \frac{0^m,63\times 0^m,03\times 0^m,03\times 9,869650\,56}{4} = \frac{0^m,63\times 0^{mm},0009\times 9,869650\,56}{4}$

$= \frac{0^{mc},000\,567\times 9,869\,650\,56}{4} = \frac{0^{mc},005\,596\,0918}{4} = 0^{mc},0014$.

Mesurer le volume d'une pièce de bois courbe.

Si les bouts sont des figures à centre, perpendiculaires aux tangentes des arcs parallèles, *vous multiplierez la superficie d'un de ces bouts, par la moyenne des arêtes courbes ou par celle du plus grand et du plus petit des arcs de la surface annulaire, lorsqu'il n'y aura pas d'arêtes.* Vous concevez en effet que la pièce redressée deviendrait un prisme ou un cylindre droit et complet dont la longueur serait précisément la moyenne employée pour multiplicateur.

Si les bouts n'ont point de centre, ou qu'un seul soit d'équerre sur les arcs, le même moyen donne un mesurage qui généralement n'est qu'approximatif, mais dont on peut se contenter dans la plupart des cas de la pratique.

244. *Jauger un tonneau.*

Plongez un mètre divisé dans le tonneau, par la bonde, de manière à prendre exactement le plus grand diamètre intérieur, qu'on appelle diamètre du *bouge;* doublez la longueur trouvée; ajoutez ce double au diamètre d'un des fonds; prenez le tiers de la somme; faites le quarré numérique de ce tiers; multipliez ce quarré par 3,1416, et le produit par la longueur de la capacité du tonneau. Le quart du résultat sera cette capacité en mètres cubes qu'il vous sera facile de convertir en litres ou en hectolitres (209 et 210).

Soient D le diamètre du bouge, d le diamètre des fonds, et L leur distance. La formule à employer est $T = \frac{2D+d}{3}\times\frac{2D+d}{3}\times 3,1416\times\frac{L}{4}$.

Observez que pour avoir la longueur L de la capacité du tonneau, il faudrait mesurer une ligne droite perpendiculaire aux deux fonds et comprise entre les faces internes de ces fonds. Comme on ne le peut pas, on

mesure la perpendiculaire comprise entre les faces externes et l'on en retranche le double de l'épaisseur d'une douelle. Cette épaisseur varie de 18 à 24 millimètres.

Supposez qu'un tonneau ait pour diamètre du bouge $0^m,625$, pour diamètre des fonds $0^m,553$, et pour longueur interne $0^m,727$. En suivant ce qui vient d'être prescrit, conformément à une instruction ministérielle de l'an VII, vous trouverez que la capacité du tonneau est de $0^{mc},206\,241$ ou de 2,062 41 hectolitres.

Si vous calculiez la même capacité, en la considérant comme composée de deux troncs de cônes accolés par leurs grandes bases (237), vous obtiendriez $0^{mc},198\,340$, nombre dont la différence à $0^{mc},206\,241$ est $0^{mc},007\,901$. Ainsi, l'erreur ne serait au plus que de 8 litres en moins.

DESSIN ET MESURAGE DES CORPS QUELCONQUES.

245. La plupart des corps dont on peut avoir à faire le dessin, à mesurer la surface ou le volume, se rapportent aux diverses formes que vous venez d'étudier. Vous verrez aisément, par exemple, qu'un tombereau offre un tronc de pyramide quadrangulaire, dont les bases, c'est-à-dire, le devant et le derrière, peuvent être considérées comme parallèles, sans grande erreur. Une hotte en bois, propre au transport des liquides, doit être assimilée à un tronc de cône à bases parallèles, bien qu'elle ait une face latérale sensiblement plane. Tous les corps ronds, pleins ou creux, sont des cylindres, des cônes, des sphères, des anneaux, ou peuvent se décomposer en parties qui présentent ces formes, soit complètement, soit partiellement. Reste donc à vous enseigner comment on dessine et l'on mesure un corps qui ne ressemble à aucun de ceux dont nous nous sommes occupés.

Auparavant et comme introduction, j'exposerai le procédé à suivre pour *cuber un corps tronqué, à base quelconque perpendiculaire aux arêtes des faces latérales.*

Faites d'abord, au moyen d'une échelle, le plan ABCD de ce corps (P. III, F. 41) et l'élévation A'A''C''C'; puis décomposez la base ABCD en triangles tels que ABD et en segmens terminés par des droites et des courbes, comme le segment BCD. Après avoir marqué sur la courbe BCD des parties arbitraires, égales ou inégales, qui puissent être prises pour des droites, sans grande erreur, vous abaisserez, des points de division

*a,b,d,*C, des perpendiculaires sur la corde BD, et vous menerez des parallèles *ae* à cette corde, de manière à former des rectangles tels que *aefg* et des triangles tels que D*ag*, *abe*; enfin, par les sommets des rectangles et des triangles, vous tirerez des parallèles aux arêtes A'A'',B'B'' etc., jusqu'à la troncature A''C''.

Alors le corps donné se trouvera décomposé en prismes tronqués triangulaires et rectangles, dont les arêtes parallèles seront comprises entre la ligne de terre A'C' et la troncature A''C''; il sera facile de mesurer ces prismes et la somme de leurs volumes donnera celui du corps.

Par exemple, le prisme triangulaire dont la base est ABD, a pour volume, le produit de la superficie ABD et de la moyenne des arêtes A'A'',B'B'',D'D'' (219).

Le prisme dont la base est le triangle D*ag*, a pour volume, la superficie D*ag* multipliée par la moyenne des arêtes D'D'',*g'g''*,*a'a''*.

Le prisme rectangle dont la base est *aefg*, a pour volume, la superficie *aefg* multipliée par la moyenne des quatre arêtes *a'a''*,*e'e''*,*f'f''*,*g'g''* (220). Ainsi des autres.

C'est de cette manière que doit se faire le cubage d'une portion de cylindre droit et tronqué, et de tout corps tronqué qui, sous une forme cylindrique, a une base dépourvue de centre.

246. *Dessiner un corps quelconque.*

Prenons pour exemple un tas de sable auquel nous supposerons $0^m,95$ de hauteur. Vous tracerez autour un rectangle ABCD (P. III, F. 42), de manière que deux des côtés soient parallèles à la plus grande droite qui puisse être tirée dans la base; puis, à l'aide d'une mesure, d'un niveau de maçon et d'une règle placée verticalement sur AB, en des points E,F,G,H,I, dont les distances à A seront connues, vous mesurerez à $0^m,9$ du sol, les distances horizontales E1,F1,G1,H1,I1, perpendiculaires à AB, et vous les coterez sur un croquis pareil au plan de la figure 42. Portant ensuite la distance AE de D en E', la distance EF de E' en F', etc., vous marquerez sur CD des points E',F', etc., qui correspondront à ceux de AB, et vous mesurerez à $0^m,9$ du sol, les distances horizontales F1',G'1', etc.

Vous serez alors en état de rapporter sur le dessin au net, le contour 1.1.1...1'.1' qui résulterait d'une coupe faite dans le tas de sable, par un plan horizontal élevé de

$0^m,9$ au-dessus du terrain. Il faudra pour cela construire, d'après une échelle, un rectangle ABCD qui ait même longueur et même largeur que celui du sol, et dont les grands côtés soient parallèles à la ligne de terre YZ; tracer les droites EE',FF', etc., conformément aux cotes du croquis; y porter les distances E1,F1,F'1', etc., et joindre par une courbe les points 1,1....1', etc. qui en résulteront.

Opérant à $0^m,6$ du sol, comme vous venez d'opérer à $0^m,9$, et plaçant la règle aux points K,E,F....L, vous mesurerez les distances horizontales K2,E2...L2,I'2', etc; puis à l'aide du croquis, vous tracerez sur le plan le contour 2.2.....2.2'...

Répétez les mêmes opérations à $0^m,3$ de terre, pour obtenir le contour 3, et sur le sol même, pour le contour 4 de la base, vous aurez le plan du tas de sable. Ce plan est ici, comme vous voyez, l'ensemble des contours donnés par des plans horizontaux espacés de $0^m,3$; mais on peut les prendre plus ou moins écartés, ainsi que les points E,F,G, etc: il suffit que les arcs de courbe compris entre ces plans horizontaux et entre les plans verticaux EE', FF', etc., diffèrent peu de lignes droites.

L'élévation résulte du plan. Tracez à des intervalles de $0^m,3$ autant de parallèles à la ligne de terre, que vous avez *levé* de contours, et coupez-les par les prolongemens des parallèles à AD. Les droites E'E,I'I vous donneront, par leurs rencontres avec la parallèle située à $0^m,9$ de YZ, l'élévation *ab* du contour 1; les droites K'K,L'L formeront, en coupant la parallèle située à $0^m,6$ de YZ, l'élévation *cd* du contour 2; l'élévation *ef* du contour 3 sera produite par les droites M'M,N'N; enfin *gh* qui représente la base du tas, sur le plan vertical, aura pour extrémités les intersections de O'O,P'P avec la ligne de terre. Si donc vous supposez que le point le plus élevé du corps se trouve dans le même plan vertical que G et G', vous achèverez l'élévation en portant $0^m,05$ de *i* en *k* et en joignant par une courbe les points *g, e, c, a, k, b, d, f, h.*

C'est ainsi que se fait le dessin complet de l'extérieur de tout corps plein ou creux dont la forme ne peut être désignée par un terme géométrique. Pour dessiner l'intérieur d'un corps creux, vous marqueriez sur les bords les points 4.4 d'une droite Q,R, et plaçant la règle dans l'alignement de ces points, vous mesureriez les distances horizontales du plan vertical QR aux divers points de chaque contour de niveau. Sur le plan, la droite QR serait une parallèle à la ligne

de terre, et le reste se ferait comme dans le cas précédent.

247. Rien de plus facile que de *cuber un corps quelconque dont on a un dessin complet*, analogue à celui de la figure 42 (P. III); ce corps se trouvant divisé en prismes droits, tronqués, rectangles ou triangulaires, il ne s'agit que de calculer le volume de chaque prisme (219 et 220) et de faire la somme de tous les résultats.

Transportez en effet, par la pensée, l'élévation dans le plan vertical QR, en plaçant la ligne de terre sur la droite QR, vous verrez aisément que le rectangle *lmno*, par exemple, est la base d'un prisme rectangle et tronqué dont les arêtes parallèles ont pour longueurs $o'4$, $n'4$, $o'3$, $n'3$. La troncature est une petite face courbe dont eplan est la figure 3.3.4.4 formée par les extrémités des arêtes parallèles; et vous pouvez la considérer comme une face plane, sans grande erreur, si les points o', n' sont peu écartés, si leur distance n'est que de $0^m,3$ comme celle des plans qui donnent les courbes 4,3, ou qui forment la face supérieure et la face inférieure du prisme rectangle. Le volume de ce prisme sera donc le produit de la superficie du rectangle *lmno*, multipliée par la moyenne des quatre longueurs $o'3$, $n'3$, $o'4$, $n'4$, exactement données par le plan.

Le rectangle *epqr* est la base d'un prisme rectangle et tronqué qui n'a que trois arêtes parallèles $q'3$, $q'4$, $r'4$: la 4e est nulle, puisque la courbe 3 aboutit au point r'; la troncature est la petite face courbe $r'3.4.4$ qui peut aussi être regardée comme plane. Le volume de ce prisme est donc le produit de la superficie du rectangle *epqr*, multipliée par la moyenne des quatre longueurs $q'3$, $q'4$, $r'4$ et zéro, ou par le quart de $q'3+q'4+r'4$.

Le triangle *egr* est la base d'un prisme triangulaire droit et tronqué dont les trois arêtes parallèles se réduisent à une seule $r'4$; de sorte que ce prisme est au fond une pyramide triangulaire dont la hauteur est $r'4$. Mais, que vous considériez cette partie du corps comme prisme tronqué ou comme pyramide, vous trouverez toujours le même volume : comme pyramide, son volume égale la superficie de la base triangulaire *egr*, multipliée par le tiers de la hauteur $r'4$; comme prisme tronqué, son volume égale la même superficie, multipliée par la moyenne des trois arêtes parallèles $r'4$, zéro et zéro ou par le tiers de $r'4$.

Les prismes qui ont pour bases les triangles *cep*, *ast*, *buv*, *bdx*, etc., sont dans le même cas que le précédent.

Le prisme dont la base est *dxyz* et tous ceux qui lui

ressemblent, doivent être traités comme le prisme dont la base est *epqr*.

Enfin, les prismes qui ont pour bases les rectangles *kiuv*, *kist*, n'ont chacun que deux arêtes parallèles: *o'*1, *n'*1 pour le 1er, *o'*1, *s'* 1 pour le 2e. Les troncatures sont les petites faces courbes représentées sur le plan par les figures *n'o'*1.1, *o's'*1.1. Pour avoir le volume de chacun, il faut en multiplier la base par le quart de la somme des deux arrêtes parallèles.

Après avoir cubé tous les prismes rectangles situés en avant du plan vertical QR, on cube de la même manière ceux qui se trouvent en arrière. La somme de tous les volumes obtenus est le volume du corps.

Lorsqu'on applique cette méthode à un polyèdre, il peut se faire que quelques-uns des prismes rectangles soient complets; mais on n'a pas besoin de les distinguer des autres: la remarque qui termine le nº 220 fait voir que les volumes des diverses parties prismatiques du corps, peuvent se calculer comme si ces parties étaient toutes des prismes rectangles tronqués.

LEVER D'UN BATIMENT.

248. Tous les corps que vous venez d'apprendre à dessiner, étaient supposés isolés; mais bien souvent on est obligé de faire le dessin complet de l'ensemble de plusieurs corps. Le procédé à suivre alors est au fond le même que celui qui a été employé pour lever le plan d'un terrain (153). Afin de vous montrer comment on doit l'appliquer, nous supposerons qu'il s'agisse de représenter un bâtiment et toutes ses dépendances. Ce bâtiment sera, par exemple, une maison d'école (*).

Il est clair d'abord que si la distribution intérieure n'est pas la même aux divers étages, le dessin doit présenter le plan de chacun, pour faire bien connaître le bâtiment. Vous aurez donc à lever successivement le plan des caves, celui du rez-de-chaussée et celui de l'étage. Le plan du grenier ne se fait que dans le cas où cette partie se trouve divisée par des cloisons.

Plan des caves.

Le plan des caves est aussi celui des fondations de la

(*) Le projet en est dû à M. *Derobe* fils, architecte.

partie principale du bâtiment. Vous pourrez en faire le croquis complet, bien qu'il soit impossible de parcourir tout l'intérieur qui n'est pas entièrement évidé. Il faudra d'abord tracer à vue un quadrilatère ABCD (P. IV, F. 1), à-peu-près semblable au quadrilatère EFGH (F. 2) que les murs du bâtiment principal forment sur le sol.

Le plan des caves est censé passer par l'horizontale qui forme l'arête inférieure de l'orifice d'un soupirail. Il coupe tous les murs à cette hauteur. Vous prendrez aisément l'épaisseur de ces murs, en introduisant horizontalement une mesure dans un des soupiraux. Vous la coterez sur le croquis, comme vous avez coté la largeur d'un chemin dans la figure 8. Cotez aussi la largeur tant extérieure qu'intérieure des soupiraux *i*, les quatre côtés et au moins une diagonale de chaque cave I et de chaque caveau K, la largeur des portes de communication *k*, l'épaisseur des murs de séparation, la longueur et la largeur d'une marche d'escalier, enfin la longueur horizontale de tout l'escalier. S'il y a des marches triangulaires, comme dans la figure 1re, vous prendrez la largeur de chacune le long du mur. S'il y en avait qui eussent la forme de trapèze, vous coteriez la largeur de chaque bout.

La petitesse de l'échelle, n'a pas permis d'inscrire toutes les cotes; mais celles que présentent les figures montrent assez comment elles doivent êtres écrites.

Les diverses dimensions qui viennent d'être indiquées, vous suffisent pour faire au net, par triangles, le plan des caves. Quelle que soit la forme du quadrilatère ABCD, vous l'obtiendrez exactement en prolongeant les côtés des triangles I et en prenant AD égal à EF, BC égal à GH. Les murs coupés doivent être couverts de hachures, ou coloriés en rouge; on met aussi des hachures ou une bordure rouge le long des murs qui soutiennent les massifs de terre T et dont on n'a pu prendre les épaisseurs.

Plan du rez-de-chaussée.

Supposez que tous les murs soient coupés par le dessus des tablettes des fenêtres inférieures étendu convenablement, et dessinez la figure qui doit en résulter, vous aurez le plan du rez-de-chaussée. Pour en faire le croquis, il faut diviser le rectangle EFGH (F. 2) à-peu-près comme il est divisé en réalité; mesurer les côtés et une diagonale de chaque pièce, la largeur, la saillie et la profondeur des

cheminées *l* et des niches *m*, la largeur tant extérieure qu'intérieure des fenêtres *a* et des portes d'entrée *b*, la largeur des portes de communication *c*, la longueur et la largeur du four L, l'épaisseur des murs et des cloisons. Les dimensions des escaliers M se prennent comme il a été dit pour ceux des caves.

Observez que la cheminée O de la cuisine étant *en hotte*, a le même plan qu'un tronc de pyramide quadrangulaire dont deux faces sont verticales.

Au plan des appartemens, s'ajoute celui des jardins, des cours et de tout ce qu'elles renferment: bûchers, écuries, latrines P; ce 2e plan est plus élevé que le premier, car c'est l'arête horizontale inférieure N d'une des fenêtres du bûcher (F. 7) qui en détermine la hauteur. Le croquis se fait toutefois comme le précédent; il doit présenter les cotes des quatre côtés et d'une diagonale de chaque quadrilatère; celles de l'épaisseur des murs, de la largeur des portes, des fenêtres, des allées *e* et des plates-bandes *f* des jardins; enfin celles de la longueur et de la largeur des deux marches d'escalier *d* placées devant les deux portes d'entrée des appartemens.

Les murs de clôture QRS n'ont pas la même épaisseur que les autres. On la détermine en retranchant de la longueur FQ, la largeur de la cour.

Vous aurez soin, dans le dessin au net, de faire les fenêtres *a* comme les représentent la figure 3. Leur plan se compose d'un rectangle et d'un trapèze: les grands côtés du rectangle égalent la largeur extérieure; les petis côtés, qu'il faut mesurer et coter, égalent l'épaisseur de la partie du mur, ordinairement en pierres de taille, qui forme cet encadrement dont la croisée est précédée. La grande base du trapèze égale la largeur intérieure des fenêtres, et la petite base excède un peu la largeur extérieure, de manière à laisser de chaque côté une petite feuillure où se loge le châssis des croisées.

Le plan d'une porte d'entrée se fait exactement comme celui d'une fenêtre, si ce n'est que les grands côtés du rectangle et la grande base du trapèze n'y sont point tracés: effectivement, ces arêtes n'existant point sur le seuil d'une porte, ne doivent pas paraître dans un plan, car on y représente seulement les objets coupés et ceux qui se trouvent moins élevés que les tablettes des fenêtres, à l'exception pourtant des escaliers: les escaliers M qui servent à monter au 1er étage, sont figurés entièrement sur le plan

du rez-de-chaussée ; ceux qui vont au 2e étage, ont toutes leurs marches tracées sur le plan du premier, et ainsi des autres.

Plan de l'étage.

Le croquis de chaque étage se fait absolument comme celui du rez-de-chaussée. On y figure et l'on y cote de plus les saillies *g* des corps de cheminée (F. 4) ; sur le plan au net, on indique en outre dans l'épaisseur des murs, ceux de ces corps qui ne sont pas apparens. Vous voyez en *m*, par exemple, la cheminée commune aux niches *m* du rez-de-chaussée : ses distances au mur de devant et au mur de refend *n*, sont évidemment égales à celles des niches aux mêmes murs.

Coupes verticales.

Des plans et une élévation ne suffisent pas pour rendre complet le dessin d'un bâtiment : l'élévation donne bien les hauteurs de toutes les parties extérieures ; mais elle n'indique jamais celles des parties intérieures. Il serait possible, à la vérité, d'y figurer quelques unes de ces parties par des lignes pointillées ; mais outre que ce moyen compliquerait et gâterait l'élévation, il serait insuffisant, attendu que les lignes de certains objets couvriraient celles de quelques autres.

Pour éviter cet inconvénient, on fait une ou plusieurs *coupes verticales*, c'est-à-dire qu'on suppose enlevée toute la partie du bâtiment située à droite du plan vertical dont la ligne de terre est YZ, par exemple (F. 2), et qu'on dessine tout ce qui est alors visible de la partie située à gauche. Ainsi, la coupe verticale qu'offre la figure 5, représente, sur une plus grande échelle, la face verticale *a* de la fenêtre Z du rez-de-chaussée, la face verticale *h* de la fenêtre située au-dessus, à l'étage, les saillies *o* des tablettes de ces fenêtres et les consoles qui les soutiennent, le soubassement *p* du mur de face, la niche *m* de la salle des garçons, le profil du mur de renfend *n*, l'élévation L du four, l'élévation O de la cheminée en hotte, le profil du mur EH, celui du plancher *q* de l'étage, le corps *g* de la cheminée de la cuisine, enfin le profil du plancher *r* du grenier et celui d'une ferme de charpente.

La face verticale *a* de la fenêtre se compose, comme le plan, d'un rectangle et d'un trapèze ; seulement, le trapèze

n'y est pas symétrique comme celui de figure 3. On cote la hauteur du rectangle, les bases du trapèze, les saillies des tablettes et du soubassement.

La ligne de terre *yz* de l'intérieur n'est pas la même que celle de l'extérieur, puisqu'il faut monter deux marches pour pénétrer dans le rez-de-chaussée. On cote la différence de niveau qui se trouve entre *yz* et YZ; elle égale la somme des hauteurs des deux marches *d* (F. 2).

La droite *s* (F. 5) représente l'arête verticale du massif du four ou une face intérieure de la cheminée O, tandis que la droite *t* représente la face extérieure qu'on voit au-dessus du four L; ces deux droites doivent donc être écartées d'une quantité égale à l'épaisseur d'un mur de cheminée. La position de la droite *t* est donnée par sa distance au mur de refend *n*.

Pour coter l'épaisseur des planchers, il faut retrancher de la distance *oo* des tablettes des deux fenêtres *a*, *h*, la distance de la tablette de *a* au plancher *q* et la distance de la face supérieure du même plancher à la tablette de *h*.

La ferme de charpente que représente la coupe, est posée sur le mur de séparation auquel se trouve adossée la cheminée de la cuisine; par conséquent, les pannes *u*, placées horizontalement sous les chevrons, sont seules coupées: le plan vertical YZ ne rencontre point les tasseaux *v* fixés sur les arbalêtriers, pour empêcher les pannes de glisser, ni ces arbalêtriers ni le poinçon 2, ni les jambettes 3 mises au-dessous des pannes pour empêcher la flexion du toit; mais la coupe rencontre les deux lattis 4 dont l'épaisseur égale celle des lattes et des tuiles, et en conséquence ce lattis doit être couvert de hachures, comme les pannes, les planchers, les profils des murs et même le sol situé au-dessous de *yz*.

Il est clair que pour être en état de dessiner exactement tout le système d'une ferme, il faut mesurer, et coter sur le croquis de la coupe, les largeurs, les longueurs de la plupart des différentes pièces qui le composent, et les distances qu'elles laissent entre elles. On prend, par exemple la hauteur totale du poinçon 2, les trois côtés du triangle rectangle formé par ce poinçon, un arbalêtrier 1 et le plancher *r*, la distance d'une jambette 3 au poinçon, et l'épaisseur d'une panne *u* qui donne l'intervalle compris entre l'arbalêtrier et le chevron.

L'étendue de la planche n'a pas permis de faire plus d'une coupe; il en faudrait pourtant une seconde au moins. Elle

serait faite sur une droite perpendiculaire à YZ (F. 2), de manière qu'elle passât à travers les escaliers M et dans les deux portes d'entrée *b*. Ce serait sur cette coupe que se trouveraient cotées les hauteurs des portes, celles des marches des escaliers de cave, de rez-de-chaussée et d'étage, la hauteur intérieure du four L et l'épaisseur de ses parois. Les étudians trouveront un exercice fort utile dans la construction d'un tel dessin. Ils devront exécuter aussi celui d'une coupe faite sur la parallèle à GH qui passe par la porte des latrines P et par l'une des fenêtres du bûcher. La figure 6 montre la partie supérieure de cette coupe, sur une échelle plus grande que celle du plan. On y voit la fenêtre du grenier à fourrage, situé au-dessus de l'écurie et du bûcher, le profil des deux murs, celui du plancher et celui des deux lattis du toit. La ferme de charpente présente seulement un poinçon et deux chevrons.

Élévation.

C'est ordinairement la façade principale qu'on dessine sur l'élévation d'un bâtiment. Il n'est pas indispensable d'en faire le croquis ; car le plan et les coupes donnent toutes les cotes dont on peut avoir besoin pour construire au net le dessin de la figure 7 : les longueurs horizontales de ce dessin se prennent sur les plans, parallèlement au mur FG de la façade principale ; toutes les longueurs verticales sont fournies par les coupes, quand elles sont bien faites. Mais observez qu'ici l'échelle de l'élévation est plus grande que celle des plans, comme celle des coupes. Il en est presque toujours ainsi, lorsque le plan est beaucoup plus étendu que les autres parties du dessin complet d'un bâtiment.

Pour éviter de faire un détail fastidieux de toutes les figures de l'élévation, on a désigné les principales par les mêmes lettres qui les indiquent sur les plans et les coupes. Il vous sera très-facile de reconnaître les autres et de trouver les moyens de leur donner la place qu'elles doivent occuper.

Vous voyez que le toit 4 dépasse les arêtes des murs EF, GH ; sa saillie égale la moitié de celle qu'il a sur la coupe 5. Les figures Q de l'élévation sont les coupes des murs de clôture QR (F. 2) : pour joindre à la façade du bâtiment principal, celles des deux bûchers, on a supposé enlevés les murs QF des deux cours et les latrines qui s'y trouvent adossées. Enfin, les petits rectangles que vous aper-

cevez au-dessus des fenêtres de chaque grenier à fourrage, sont les bouts des chevrons du toit; leur hauteur verticale, à-peu-près égale à leur largeur, est donnée par la coupe 6. Il n'y a pas de pareils rectangles au-dessus des fenêtres de l'étage, parce que les chevrons du toit du bâtiment principal sont taillés en biseau et ne descendent même pas jusqu'au bord de la saillie: c'est une large planche qui l'achève.

MESURAGE DES POIDS.

249. Il existe des corps d'un tel poids qu'on ne saurait les peser ni avec des balances, ni avec une romaine. Le mesurage des poids est, en pareil cas, du ressort de la Géométrie. On cube le corps et l'on multiplie par le volume, le poids de l'unité de ce volume; le produit exprime évidemment le poids entier.

Ce mode d'évaluation des poids nécessite, comme vous voyez, la connaissance de ce que pèse l'unité de volume du corps donné. On prend pour cette unité, le *décimètre cube*, et en voici la raison. Comme 1 décimètre cube d'eau pure pèse exactement 1 kilogramme, il suffit, pour avoir en kilogrammes le poids du décimètre cube d'un corps, de trouver combien ce poids contient de fois celui du décimètre cube d'eau pure. Or, ce nombre de fois est visiblement égal à celui que donneraient les poids de deux volumes quelconques, mais égaux, des mêmes substances. Donc, pour connaître en kilogrammes, le poids du décimètre cube d'un corps donné, il ne s'agit que de chercher combien le poids d'un volume quelconque de ce corps contient de fois le poids du même volume d'eau pure, et la Physique enseigne les moyens de faire facilement une telle recherche.

Le poids d'un décimètre cube est ce qu'on nomme le *poids spécifique* du corps, c'est-à-dire le poids qui le *spécifie*, qui le caractérise, qui le distingue des autres. Une masse de plomb peut peser 50 kilogrammes, comme une masse de bois ou de houille ou de fer; mais le plomb est le seul corps dont le décimètre cube pèse $11^{kg},3523$.

Les poids spécifiques des corps les plus importans, ont été déterminés avec une grande précision. Voici ceux qu'il vous est utile de connaître; quelques-uns ne sont qu'approximatifs, mais leur degré d'approximation est suffisant pour la pratique.

	kg.		kg		kg
Acier.....	7,67	Hêtre.....	0,852	Pommier ...	0,793
Air.....	0,0013	Houille.....	1,3292	Prunier.....	0,785
Argent.....	10,7	Huile de lin.	0,94	Sable pur...	1,9
Bois d'aulne.	0,8	Huile de nav.	0,919	Sable terreux	1,7
Beurre.....	0,942	Lard.....	0,948	Sapin.....	0,55
Brique.....	2,168	Liège.....	0,24	Sapin jaune..	0,657
Cerisier....	0,715	Mercure....	13,598	Saule.....	0,685
Chêne (cœur)	1,17	Meules (moul)	2,484	Sel marin...	1,92
Cire jaune...	0,965	Noyer.....	0,671	Suif.....	0,942
Cuivre rouge.	8,788	Or fondu....	19,2581	Terre argileuse	1,6
Diamant....	3,551	Orme.....	0,671	Terre-glaise.	1,9
Eau-de-vie..	0,86	Peuplier blanc	0,529	Terre végétale	1,4
Esprit de vin.	0,837	Peupl. ordin.	0,583	Tilleul.....	0,604
Etain.....	7,2914	Pierre à bâtir.	2,08	Tuile.....	2
Fer en barre.	7,788	Pierre à plâtre	2,2168	Vapeur d'eau	0,0008
Fonte de fer.	7,207	Platine.....	19,5	Verre.....	2,4882
Frêne.....	0,845	Plomb fondu.	11,3523	Vin (bon)...	0,99
Glace d'eau.	0,93	Poirier.....	0,661	Zinc.....	7,191

250. Pour vous apprendre l'usage de ce tableau, supposons qu'il faille déterminer le poids d'un mètre cube de bon sable. Vous multiplierez $1^{kg},9$, poids spécifique du sable pur, par 1000, attendu que le mètre cube contient 1000 décimètres cubes, et le produit 1900^{kg} sera le poids cherché.

Si l'on avait à trouver le poids de $35^{me},45$ du même sable, il faudrait d'abord convertir ce volume en décimètres cubes, ce qui donnerait $35\,450^{dc}$, et multiplier ensuite par 35 450, le poids $1^{kg},9$ d'un seul décimètre cube. On aurait ainsi $67\,355^{kg}$.

S'agit-il de connaître, sans peser, le poids d'une pièce de bois carré, essence de chêne, qui porte $0^{m},6$ sur 14^{m}? Vous calculez le volume du prisme en décimètres cubes (208) et vous trouvez $0^{m},6 \times 0^{m},6 \times 14^{m} = 5^{me},04 = 5\,040^{dc}$; puis vous multipliez par ce dernier nombre, le poids spécifique $1^{kg},17$, ce qui vous donne $5\,896^{kg},8$.

Vous trouveriez d'une manière analogue, le poids d'un essieu de fer : le poids spécifique du fer en barre devrait être multiplié par le volume de l'essieu calculé en décimètres cubes. Pour avoir ce volume, vous observeriez que le corps de l'essieu est un prisme rectangle et que les fusées sont deux troncs de cône égaux.

Ce qu'il y a de plus difficile dans l'étude d'une science, c'est de se familiariser avec les termes nouveaux qu'on y emploie. Faute de se bien rappeler ces termes et leurs valeurs, on a de la peine à suivre la description d'un tracé, à retenir la série des opérations qui conduisent au résultat, et l'on éprouve plus de difficulté encore à comprendre les explications et les raisonnemens. Cependant, l'habitude du langage géométrique ne suffit point pour qu'on soit en état de sentir la justesse d'une démonstration, ou de faire des applications sans commettre de graves erreurs : les principes doivent être tout aussi présens à l'esprit que les termes.

Nous croyons donc faire une chose extrêmement utile aux étudians, en terminant ce livre par un *résumé* succinct des définitions et des principes les plus importans. Ce résumé est en quelque sorte l'abrégé de la science ; tout ce qu'il renferme est du ressort de la mémoire et doit lui être confié. Nous pensons même que le seul moyen d'obtenir des succès rapides et soutenus dans l'enseignement de la Géométrie, c'est de faire apprendre par cœur, après chaque leçon, la partie du résumé qui s'y rapporte, et d'exiger, avant de commencer la leçon suivante, une récitation exacte de toutes les définitions et de tous les principes précédemment appris.

Lorsque la tâche devient trop grande, l'instituteur peut se borner à faire réciter le résumé de la dernière leçon, puis ce qui concerne les *cercles*, par exemple ; le lendemain, il demandera le chapitre des *angles* ; le surlendemain, la *comparaison des droites*. L'essentiel est d'obtenir que les élèves répètent imperturbablement chaque chapitre du résumé, d'empêcher qu'ils n'en oublient aucun article, et de s'assurer, en leur faisant tracer rapidement des figures, qu'ils comprennent ce qu'ils récitent.

Pour éviter de grossir le livre inutilement, nous avons cherché à faire du résumé une espèce de *Table des matières* : à droite sont les numéros des pages et à gauche les numéros des articles où se trouvent, soit les définitions, soit les principes.

Google

RÉSUMÉ.

LIGNES ET ARÊTES DES CORPS.

Nos. Pag.

On appelle *corps*, tout ce qui peut être touché; un corps a des faces et des arêtes ou *lignes*. 9

On nomme aussi *lignes*, tous les traits fins qu'on trace sur un corps.

Un *point* est une partie extrêmement courte d'une ligne.

LIGNE DROITE.

1. Une ligne est *droite*, quand elle peut se confondre avec une des arêtes d'une bonne règle; elle est courbe, lorsqu'elle ne le peut pas.

La *ligne droite* est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, et la *vraie distance* de ces deux points.

3. Deux points suffisent pour déterminer une ligne droite. 10

CERCLE.

4. Le *cercle* ou *circonférence* est une ligne courbe fermée, qui se décrit avec un compas 11

5. Le *centre* du cercle est le point occupé par la pointe fixe du compas qui décrit la courbe.

Un *rayon* est une droite qui va du centre à la circonférence.

Une *corde* est une droite qui joint deux points de la circonférence.

Un *arc* est une partie quelconque de la circonférence.

Un *diamètre* est une corde qui passe par le centre.

Tous les rayons d'un cercle sont égaux.

Chaque diamètre vaut deux rayons. 12

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux.

La circonférence est le lieu où se trouvent tous les points situés à une distance du centre, égale au rayon.

COMPARAISON DES CERCLES ET DE LEURS ARCS.

8. Les longueurs des circonférences se contiennent comme les rayons ou comme les diamètres.

11. Les nombres de tours que font dans le même tems deux roues dentées qui engrènent l'une sur l'autre, se contiennent à l'inverse des rayons. 13

13. Deux circonférences de même rayon sont égales. . . . 14

14. Un arc en contient un autre de même rayon, autant de fois qu'il peut en recevoir la corde.

Nos. Pag.

La corde est toujours censée appartenir au plus petit des deux arcs qu'elle sépare sur la circonférence. . . 14

Un arc double d'un autre, n'a pas une corde double.

15. Deux arcs de même rayon sont égaux, s'ils ont des cordes égales 15

18. Tout diamètre partage la circonférence en deux moitiés.

MESURAGE DU CERCLE, DES ARCS ET DU DIAMÈTRE.

19. La longueur d'une circonférence égale celle de son diamètre multipliée par 3,1416. 16

20. La longueur d'un arc est le quotient de la circonférence entière, divisée par le nombre de fois qu'il s'y trouve contenu.

22. Le diamètre égale la circonférence divisée par 3,1416 . 18

Pour faire un cordeau-équerre, il faut attacher une corde qui ait 5 mesures, à deux points d'une autre corde séparés par 7 mesures.

ANGLES.

23. *L'intersection* de deux droites est le point unique où elles se coupent. 19

L'*angle* est l'espace illimité compris entre deux droites qui se rencontrent.

Les *côtés* de l'angle sont les droites qui le forment.

Le *sommet* de l'angle est le point de rencontre des côtés.

COMPARAISON DES ANGLES.

25. *L'indication* d'un angle est l'arc décrit du sommet, entre les côtés. 20

26. Les angles se contiennent comme leurs arcs d'indication de même rayon.

27. Les angles sont égaux, quand les arcs d'indication ont le même rayon et des cordes égales. 21

28. Deux *angles opposés par le sommet* sont formés chacun par les prolongemens des côtés de l'autre.

Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

29. L'angle droit a pour indication, le quart de la circonférence. 22

30. Tous les angles droits sont égaux.

31. Tous les angles qui peuvent être faits autour d'un point, valent en somme quatre angles droits.

Tous les angles de même sommet qui peuvent être faits du même côté d'une droite, valent en somme deux angles droits.

32. L'*angle aigu* est moindre qu'un angle droit. . . . 23

L'*angle obtus* est plus grand qu'un angle droit.

33. L'*angle inscrit* a son sommet sur la circonférence, et ses côtés sont des cordes.

Nos Pag.

L'angle au centre a son sommet au centre, et ses côtés sont des rayons 23

L'indication de l'angle inscrit est la moitié de l'arc compris entre les côtés, sur la circonférence où est le sommet 24

Tout angle inscrit qui comprend un diamètre, est un angle droit.

MESURAGE DES ANGLES.

34. Le *degré* est la 360e partie de la circonférence.

L'angle d'un degré est celui dont l'arc d'indication ne renferme qu'un seul degré.

L'angle d'un degré est l'unité de mesure pour les angles.

Un angle vaut autant de fois l'angle d'un degré, qu'il y a de degrés dans son arc d'indication.

35. Toute circonférence renferme 360 degrés 25

Chaque degré se compose de 60 minutes.

Chaque minute se divise en 60 secondes.

36. Des arcs compris dans le même angle et décrits du sommet, ont le même nombre de degrés, quoique de rayons différens.

PERPENDICULAIRES.

37. Une *perpendiculaire* est une droite qui fait un angle droit avec une autre. 26

Etre perpendiculaire entre elles ou d'équerre, c'est la même chose pour deux droites.

La perpendiculaire au milieu d'une droite est le lieu de tout point également éloigné des deux extrémités.

Il suffit que deux points d'une droite soient également éloignés chacun des extrémités d'une autre, pour que la première se trouve perpendiculaire au milieu de la seconde.

41. La distance d'un point à une droite est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point. 28

44. Une *verticale* est une droite qui se confond avec le fil-à-plomb librement suspendu. 30

Une *horizontale* ou ligne de niveau est une droite perpendiculaire à la verticale.

Une droite qui n'est ni horizontale ni verticale, est *inclinée*.

Pour un même point, il n'y a qu'une seule verticale ou *ligne d'aplomb*.

Une infinité d'horizontales différentes peuvent se croiser au même point.

PARALLÈLES.

45. Des *parallèles* sont deux droites qui ont partout le même écartement. 31

N°. Pag.

Chaque parallèle est le lieu de tous les points situés à une même distance de l'autre 31

46. Deux droites parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.

47. Une *transversale* est une droite qui traverse d'une manière quelconque, l'ensemble de plusieurs autres droites.

Deux parallèles et une tranversale forment des couples *d'angles correspondans* et des couples *d'angles alternes-internes* 32

Les angles correspondans sont tous deux du même côté de la transversale, l'un en dedans des parallèles, l'autre en dehors.

Les angles alternes-internes sont tous deux en dedans des parallèles et séparés par la transversale.

Les angles correspondans sont égaux.

Les angles alternes-internes sont égaux.

Si deux droites coupées par une troisième, forment des angles égaux qui aient des positions analogues à celles des angles correspondans ou à celles des angles alternes-internes, ces deux droites sont parallèles.

Des perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

TANGENTES ET CERCLES TANGENS.

51. Une *tangente* est une droite qui n'a qu'un seul point de commun avec un cercle. 34

Le *contact* d'une tangente est le point commun à la droite et au cercle.

Une droite est tangente, quand elle est perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.

53. On peut toujours mener deux tangentes par un point situé hors d'un cercle. 35

54. Les tangentes parallèles d'un cercle sont perpendiculaires aux extrémités d'un même diamètre.

55. Deux cercles ont quatre tangentes communes.

Les contacts d'une tangente commune à deux cercles sont sur des rayons parallèles.

56. Deux cercles tangens l'un à l'autre n'ont qu'un seul point de commun.

Le contact de deux cercles tangens est sur la droite des centres 36

Deux cercles se touchent extérieurement, quand la distance des centres est la somme des rayons.

Un cercle en touche un autre intérieurement, quand il est moindre et que la distance des centres égale la différence des rayons.

57. Deux arcs se *raccordent*, lorsqu'ils sont tangens.

Les *cintres surbaissés* et les *arcs rampans* sont des courbes ordinairement composées d'arcs de cercle qui se raccordent.

N°. Pag.

COMPARAISON DES DROITES.

59. Des circonférences *concentriques* sont des circonférences qui ont le même centre. 38
Les parties de rayon comprises entre des circonférences concentriques, sont des droites égales.
60. Une *oblique* est une droite qui fait un angle aigu ou obtus avec une autre droite qu'elle rencontre.
Le *pied* d'une oblique ou d'une perpendiculaire est le point où elle rencontre l'autre droite.
L'écartement d'une oblique et d'une perpendiculaire est le même que celui de leurs pieds.
Deux obliques sont égales, lorsqu'elles s'écartent également de la perpendiculaire abaissée de leur point de rencontre.
Les écartemens de deux obliques égales sont égaux.
Les angles analogues formés par deux obliques égales, sont égaux.
Dans deux figures séparées, l'égalité des perpendiculaires, celle des obliques et celle des angles analogues existent en même temps.
61. Deux tangentes sont égales, quand elles partent du même point et se terminent aux contacts. 39
62. La perpendiculaire au milieu d'une droite, la divise en deux parties égales.
63. La perpendiculaire au milieu d'une corde, passe par le milieu de l'arc et par le centre. 40
64. La *bisectrice* d'un angle est une droite qui le divise en deux parties égales. 41
La bisectrice est le lieu de tout point également éloigné des deux côtés de l'angle.
65. Des concourantes sont des droites qui se rencontrent ou qui pourraient se rencontrer toutes au même point.
Si des parallèles divisent une concourante en parties égales, elles divisent toutes les autres de la même manière. 42
66. Des parties de parallèles comprises entre des parallèles sont égales 43
Des droites qui comprennent entre elles des parties égales de parallèles, sont parallèles et égales.
67. Des concourantes sont divisées de la même manière, par des parallèles.
Lorsque des droites divisent des concourantes de la même manière, elles sont parallèles.
Des parallèles comprises entre deux concourantes, se contiennent comme les distances de leurs extrémités correspondantes au point de concours.
Des parallèles sont divisées de la même manière, par des concourantes.

N° Pag.

70. Une droite est *moyenne proportionnelle* entre deux autres, quand elle contient la plus petite autant de fois qu'elle-même est contenue dans la plus grande. 46

Une demi-corde perpendiculaire à un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties de ce diamètre.

MESURAGE DES DROITES.

71. Pour avoir plus sûrement la vraie longueur d'une droite, il faut la mesurer au moins trois fois, et prendre la moyenne des nombres obtenus. 47

72. Quand il s'agit de trouver la longueur horizontale d'une droite inclinée, on doit tenir la mesure horizontalement. 48

73. Quatre points donnés, joints deux à deux par six droites, produisent en général trois points de concours, au nombre desquels est un croisement. 49

La droite qui passe par le croisement et l'un des deux autres concours, partage en deux parties inégales, la distance de deux des points donnés.

Si l'on multiplie la somme des deux parties inégales, par la plus petite, et qu'on divise le produit par leur différence, on obtient la distance du troisième concours, au point donné qui termine la plus petite partie.

FACES DES CORPS.

83. Une *face plane* est une face sur laquelle une bonne règle peut être appliquée de toute sa longueur, dans tous les sens. 55

Une *face courbe* est une face sur laquelle une bonne règle ne peut être appliquée de toute sa longueur, dans tous les sens.

La *surface* d'un corps est l'ensemble des faces.

PLANS.

84. Un *plan* est une face plane qu'on regarde comme illimitée.

85. Un *plan vertical* est un plan sur lequel le fil-à-plomb librement suspendu, peut s'appliquer dans toute sa longueur 56

Un *plan horizontal* est un plan sur lequel on peut tracer deux horizontales concourantes.

Un plan qui n'est ni vertical ni horizontal, est *incliné*.

86. Une droite est perpendiculaire sur un plan, quand elle l'est sur deux droites de ce plan, qui se croisent à son pied.

La verticale est perpendiculaire au plan horizontal qu'elle rencontre.

N° Pag.

La distance d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire qu'on y abaisse de ce point. . . . 57

87. Une droite est parallèle à un plan, lorsque deux de ses points en sont également éloignés.

Une droite et un plan sont encore parallèles, lorsqu'ils comprennent entre eux deux parallèles égales.

Toute horizontale située hors d'un plan horizontal, lui est parallèle.

Toute verticale située hors d'un plan vertical, lui est parallèle.

88. Une droite est oblique sur un plan, si elle n'est ni perpendiculaire, ni parallèle à ce plan.

La pente d'une droite inclinée est la différence des distances d'un plan horizontal à deux points de cette droite écartés horizontalement d'une unité de longueur. 58

89. L'angle d'une oblique et d'un plan, est celui qu'elle fait avec une droite menée de son pied à celui d'une perpendiculaire abaissée d'un de ses points sur le plan.

90. L'*intersection* de deux plans qui se coupent, est l'ensemble des points qui leur sont communs. 59

L'intersection de deux plans est toujours une droite.

91. L'intersection de deux plans verticaux est une verticale.

92. Le *coin* est l'espace illimité que laissent entre eux deux plans qui se rencontrent. 60

L'*indication d'un coin* est la même que celle de l'angle formé par deux droites tracées sur les plans, perpendiculairement à l'intersection.

Deux plans sont d'équerre entre eux, quand ils forment un coin droit ou quand l'un renferme une perpendiculaire à l'autre.

Tout plan vertical est perpendiculaire au plan horizontal qu'il rencontre.

93. Tout plan qui rencontre un plan horizontal, y marque une droite de niveau 61

Une *ligne de plus grande pente* est, sur un plan incliné, toute droite qui fait, avec le plan horizontal, le même angle que le plan incliné.

Les lignes de plus grande pente sont perpendiculaires aux horizontales du plan incliné.

94. Le plan vertical qui contient une ligne de plus grande pente, est perpendiculaire au plan incliné.

95. Deux plans sont parallèles, quand ils sont partout également écartés. 62

La distance de deux plans parallèles est la longueur d'une perpendiculaire commune, prise d'un plan à l'autre.

Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Deux plans horizontaux sont parallèles.

Nos Pag.

Des parallèles comprises entre des plans parallèles, sont égales 63

EXTRACTION DE RACINE.

96. Le *quarré* d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié par lui-même.

La *racine quarrée* d'un nombre est un autre nombre dont le quarré reproduirait le premier.

L'*extraction de racine* est une opération de calcul qui fait trouver la racine quarrée d'un nombre. 64

Pour qu'un chiffre qui vient d'être mis à la racine, ne soit pas trop petit, il faut que le reste qu'il a fourni, soit moindre que le double de la partie de racine déjà trouvée, augmenté d'une unité 67

POLYGONES.

97. Un *polygone* est une face plane limitée par des droites.

Les *côtés* d'un polygone sont les droites qui le forment.

Les *sommets* d'un polygone sont les points où se rencontrent les côtés.

Dans le polygone à *angles saillans*, tous les angles s'ouvrent en dedans.

Dans le polygone à *angles rentrans*, il y a des angles qui s'ouvrent en dehors ou dont les sommets rentrent vers l'intérieur.

Les *diagonales* d'un polygone sont des droites qui joignent deux sommets séparés par un autre ou plusieurs.

Les *angles intérieurs* d'un polygone sont formés par les côtés.

Un *angle extérieur* est formé par un côté et le prolongement d'un des deux côtés voisins.

Un *polygone régulier* a tous ses angles égaux et tous ses côtés de même longueur.

Deux polygones *semblables* sont tels que l'un est la copie réduite de l'autre.

Lorsque deux polygones sont semblables, les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, et les angles égaux sont placés dans le même ordre, sur les deux figures.

Les côtés *correspondans* de deux polygones semblables sont ceux qui joignent les sommets des angles de même indication.

Lorsque deux polygones sont semblables, deux côtés correspondans se contiennent le même nombre de fois que deux autres côtés correspondans quelconques.

Nos Pag.

TRIANGLES.

98. Un *triangle* est un polygone à 3 angles et à trois côtés. 68
La somme des trois angles d'un triangle égale celle de 2 angles droits.
Tout angle extérieur d'un triangle vaut la somme des deux angles intérieurs qui ont des sommets différens du sien.
99. Pour que trois droites puissent former un triangle, il faut que chacune soit moindre que la somme des deux autres.
102. Le *triangle symétrique* a deux côtés de même longueur. 69
Dans un triangle symétrique, les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux aussi.
103. La *base* d'un triangle symétrique est le côté qui n'a pas d'égal.
La base de tout autre triangle est un côté quelconque.
La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire abaissée sur la base, du sommet opposé.
104. Le *triangle équilatéral* a ses trois côtés de même longueur et ses trois angles égaux. 70
Le triangle équilatéral est un polygone régulier.
105. Le *triangle rectangle* a un angle droit.
L'*hypothénuse* d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.
Les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit.

Comparaison des triangles.

106. Des *triangles égaux* se couvrent exactement. . . . 71
Il y a égalité entre deux triangles, 1° quand les côtés de l'un égalent les côtés de l'autre;
2°. Quand un angle de l'un égale un angle de l'autre, et que les côtés du premier angle ont mêmes longueurs que ceux du second;
3°. Quand un côté de l'un a même longueur qu'un côté de l'autre, et que les angles formés par le premier côté, égalent ceux qui sont formés par le second.
Deux triangles rectangles sont égaux, lorsque l'hypothénuse et un petit côté de l'un, égalent l'hypothénuse et un petit côté de l'autre.
107. Deux *triangles équivalens* renferment la même superficie, sans pouvoir se couvrir exactement. . . . 72
Deux triangles sont équivalens, quand la base et la hauteur de l'un égalent la base et la hauteur de l'autre.
108. Les superficies de deux triangles de même hauteur se contiennent comme les bases.
109. Deux triangles qui renferment un même angle, se contiennent comme les produits des côtés de cet angle 73

N° Pag.

110. Deux triangles sont semblables, 1°. quand deux angles du petit sont égaux à deux angles du grand; . . 73
2°. Lorsque deux côtés quelconques de même rang se contiennent comme deux autres côtés de même rang;
3°. Lorsqu'un angle du grand égale un angle du petit, et que les côtés du premier angle contiennent leurs correspondans du second le même nombre de fois; . . 74
4°. Lorsque les trois côtés d'un triangle sont parallèles aux trois côtés de l'autre;
5°. Lorsque les trois côtés d'un triangle sont perpendiculaires aux trois côtés de l'autre.

111. Deux triangles semblables se contiennent comme les quarrés numériques de deux côtés correspondans.
Réduire ou étendre un triangle comme l'indique un nombre, c'est réduire ou étendre les côtés comme l'indique la racine quarrée de ce nombre. 75

112. Tout triangle rectangle est partagé en deux triangles qui lui sont semblables, par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse.
Le quarré numérique de l'hypothénuse égale la somme des quarrés numériques des deux autres côtés d'un triangle rectangle.

QUADRILATÈRES.

Un *quadrilatère* est un polygone de 4 côtés. . . . 78

113. Un *trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles. 79
Le *trapèze* est *symétrique*, lorsque les côtés concourans sont égaux.

114. Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
La hauteur d'un parallélogramme est la distance de deux côtés opposés, et la base est l'un de ces côtés.
Les diagonales d'un parallélogramme sont inégales et se coupent par le milieu. 80

115. Un *losange* est un parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux et obliques les uns sur les autres.
Les diagonales d'un losange sont inégales et d'équerre. 81

116. Un *rectangle* est un parallélogramme dont les angles sont droits et les côtés voisins inégaux.
Les diagonales d'un rectangle sont égales et se coupent obliquement.

117. Un *carré* est un parallélogramme dont les angles sont droits et les 4 côtés égaux. 82
Les diagonales d'un carré sont égales et d'équerre.

Comparaison des quadrilatères.

118. Deux quadrilatères sont égaux, lorsque les côtés et

N.. Pag.

une diagonale de l'un égalent les côtés de même rang et la diagonale correspondante de l'autre. 83

119. Deux trapèzes sont égaux, lorsque les côtés de l'un égalent les côtés correspondans de l'autre.

120. Deux losanges sont égaux, lorsque le côté et une diagonale de l'un égalent le côté et une diagonale de l'autre. 84

Deux parallélogrammes sont équivalens, quand il y a égalité entre les bases et entre les hauteurs.

Deux parallélogrammes qui ont seulement des bases égales, se contiennent comme leurs hauteurs.

Deux parallélogrammes qui ont seulement des hauteurs égales, se contiennent comme leurs bases.

121. Deux rectangles sont égaux, quand il y a égalité entre leurs bases et entre leurs hauteurs. . . . 85

Deux carrés sont égaux, si le côté de l'un égale celui de l'autre.

Mesurage des quadrilatères et des triangles.

122. Les unités de superficie sont des carrés et des rectangles.

123. La superficie d'un rectangle égale le produit de la base par la hauteur 86

126. Pour obtenir les parties carrées ou centésimales du mètre carré, il faut partager en groupes de deux chiffres, à partir de la virgule, les décimales qui accompagnent le nombre de mètres carrés. . . . 88

127. Pour mesurer un rectangle en hectares, il faut mesurer la base et la hauteur en décimètres, multiplier les deux longueurs l'une par l'autre, séparer 6 décimales et barrer les deux dernières. 89

133. La superficie d'un carré égale le quarré numérique du côté. 91

134. Le triangle rectangle donne le moyen de doubler, tripler, etc., un carré.

135. Pour avoir le côté d'un carré qui soit équivalent à une figure donnée, il faut mesurer la superficie de cette figure, puis extraire la racine du nombre obtenu. 92

136. La superficie d'un parallélogramme égale le produit de la base par la hauteur

137. La superficie d'un triangle égale la moitié du produit de la base par la hauteur. 93

138. La superficie d'un triangle égale aussi la racine quarrée du produit fait avec la demi-somme des côtés et les différences de chaque côté à cette demi-somme . . 94

Nos Pag.

139. La superficie d'un quadrilatère égale la somme de celles des deux triangles qui le composent 95
La superficie d'un trapèze égale le produit de la demi-somme des deux bases, mutipliée par la hauteur.

POLYGONES RÉGULIERS.

140. La somme des angles intérieurs de tout polygone vaut 180° multiplié par leur nombre diminué de 2.
On obtient l'indication de l'angle intérieur d'un polygone régulier, en divisant la somme de tous les angles intérieurs par leur nombre.
141. Un *pentagone* est un polygone de 5 côtés. 96
Un *polygone inscrit* a tous ses sommets sur une circonférence 97
Le centre d'un polygone régulier est celui de la circonférence où il peut être inscrit.
L'*angle au centre* d'un polygone régulier est formé par des rayons menés à deux sommets voisins.
L'indication de l'angle au centre est le quotient de 360° divisés par le nombre des côtés du polygone.
142. Pour tracer un polygone régulier dont le côté est donné, il faut commencer par construire un polygone régulier de même nom, dont le côté ait une longueur arbitraire.
143. L'*hexagone* est un polygone de 6 côtés.
Le côté de l'hexagone régulier égale le rayon. . . . 98
144. L'*octogone* est un polygone de 8 côtés.
145. Le *décagone* est un polygone de 10 côtés.
146. Le *dodécagone* est un polygone de 12 côtés.
147. Le *pentédécagone* est un polygone de 15 côtés.
148. Pour déduire d'un polygone régulier, un autre polygone régulier d'un nombre de côtés double, il suffit de partager en deux parties égales chacun des arcs de la circonférence où le premier est inscrit. . . . 99
149. Une *circonférence circonscrite* à un polygone, passe par tous les sommets.
Un *cercle inscrit* à un polygone régulier, est tangent au milieu de chaque côté.
Un *polygone circonscrit* à un cercle, a tous ses côtés tangens.

COMPARAISON DES POLYGONES.

150. Deux polygones quelconques sont égaux, quand les côtés de l'un et les diagonales tirées d'un des sommets, égalent les côtés correspondans et les diagonales correspondantes de l'autre. 100
151. Deux polygones réguliers sont égaux, lorsqu'ils portent

N° Pag.

le même nom et que le côté de l'un égale le côté de l'autre. 100

152. Deux polygones sont *semblables*, quand le petit est composé de triangles semblables à ceux du grand et placés dans le même ordre.

Deux polygones réguliers sont semblables, s'ils portent le même nom. 101

Deux polygones semblables se contiennent comme les quarrés numériques de deux quelconques de leurs droites correspondantes.

Tout polygone qui a pour un de ses côtés, l'hypothénuse d'un triangle rectangle, vaut la somme des deux polygones semblables à lui, dont les côtés correspondans sont ceux de l'angle droit.

Les cercles peuvent être considérés comme des polygones semblables d'un très-grand nombre de fort petits côtés.

Réduire ou étendre un polygone, revient à réduire ou à étendre les triangles dont il se compose. . 102

Lever des plans.

153. *Lever* le plan d'un terrain, revient à faire des triangles semblables à ceux qui s'y trouvent figurés.

Le croquis d'un plan est le dessin à vue du terrain. 103

Tous les mesurages qu'exige le lever d'un plan, se font horizontalement.

Orienter un plan, c'est y tracer la méridienne du terrain. 105

Faire un nivellement, c'est prendre les hauteurs des points remarquables d'un terrain au-dessus d'un point déterminé 106

Mesurage des polygones.

154. La superficie d'un polygone régulier égale la moitié du produit de son contour, par le rayon du cercle inscrit 108

155. La superficie d'un cercle égale le quarré numérique du rayon multiplié par 3,1416.

156. Un *secteur* de cercle est formé par deux rayons et l'arc qui les sépare. 110

La superficie d'un secteur égale la moitié du produit de l'arc multiplié par le rayon.

157. Un *segment* de cercle est formé par un arc et la corde.

La superficie d'un segment égale la superficie du secteur de même arc, moins celle du triangle formé par la corde et les rayons.

158. La superficie d'un polygone égale la somme des triangles et des trapèzes qu'on y peut figurer.

Nos Pag.

Pour mesurer l'ensemble d'une suite de trapèzes qui ont tous même hauteur et deux à deux une base commune, il faut faire la somme des bases communes, y ajouter les moitiés des bases extrêmes, et multiplier le total par la hauteur d'un trapèze. . . 112

159. Lorsque dans une suite de trapèzes, terminée par deux triangles, les figures ont toutes même hauteur et deux à deux une base commune, on obtient la superficie totale en multipliant la somme des bases par une seule hauteur. 113

161. Un terrain en pente doit être arpenté horizontalement. 114

162. *Partager* un terrain, consiste en général à y tracer des triangles égaux aux moitiés des portions. . . 115

DESSIN DES CORPS.

164. Le *dessin complet* d'un corps se compose d'un plan et d'une élévation. 118

Le *plan* d'un corps est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points du corps, sur un plan horizontal.

165. L'*élévation* d'un corps est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points du corps, sur un plan vertical 119

166. La *ligne de terre* d'un dessin sépare le plan de l'élévation; elle représente l'intersection du plan horizontal et du plan vertical. 120

SURFACES COURBES.

169. La *surface courbe* d'un corps est une face courbe qui n'est interrompue par aucune face plane. . . . 122

Une surface courbe *réglée* peut être touchée dans quelques sens seulement, par tous les points d'une règle.

SURFACES CYLINDRIQUES.

170. La *surface cylindrique* est une surface courbe réglée selon des parallèles.

Un cylindre est un corps terminé par une surface cylindrique et deux faces planes.

Un *cylindre complet* a deux faces planes parallèles; ces faces en sont les bases.

Les droites de la surface courbe d'un cylindre complet, sont toutes de même longeur 123

Un *cylindre tronqué* a deux faces planes non parallèles; l'une en est la base et l'autre la *troncature*.

Un *cylindre circulaire* a un cercle pour base.

Un *cylindre oblong* a pour base une courbe fermée non circulaire.

Nos Pag.

Un *cylindre droit* a sa base d'équerre sur les droites de sa surface 123

Dans un *cylindre oblique*, les droites de la surface sont inclinées sur la base.

Un *manchon cylindrique* est un cylindre évidé en cylindre.

L'*axe* d'un cylindre est la droite qui joint les centres des deux faces planes.

172. La surface courbe d'un cylindre droit et complet égale le produit du contour de la base par la longeur. . . 124

173. La *surface totale* d'un cylindre égale la somme de la surface courbe et des deux faces planes.

175. La surface courbe d'un cylindre droit et tronqué égale le produit du contour de la base par la moyenne des droites de la surface. 125

178. La surface totale d'un manchon cylindrique égale la somme des deux surfaces cylindriques et des deux bandes circulaires qui forment les bases. 126

SURFACES CONIQUES.

179. La *surface conique* est une surface courbe réglée selon des concourantes.

Un *cône* est un corps terminé par une surface conique et une face plane qui en est la base.

Un *cône complet* renferme le point de concours des droites de la surface courbe.

Un *cône tronqué* a deux faces planes et ne présente pas le point de concours des droites de la surface conique . 127

Le cône tronqué ou *tronc de cône* a deux bases, quand ses faces planes sont parallèles.

Un *cône circulaire* a un cercle pour base.

Un *cône oblong* a pour base une courbe fermée non circulaire.

Le *sommet* d'un cône est le point de concours des droites de la surface courbe.

L'*axe* d'un cône est la droite qui joint le sommet au centre de la base.

Un *cône droit* a sa base d'équerre sur son axe.

Dans le *cône oblique*, l'axe est incliné sur la base.

Les droites de la surface courbe d'un cône ou d'un tronc de cône droit font le même angle sur la base.

Un *manchon conique* est un cône tronqué évidé en cône.

181. La surface courbe d'un cône droit, circulaire et complet, égale la moitié du produit du contour de la base par une droite de cette surface.

183. La surface courbe d'un tronc de cône droit et circulaire, à bases parallèles, égale la moitié du produit fait avec la somme des contours des bases et une droite de cette surface. 128

N° Pag.

SURFACES SPHÉRIQUES.

186. La *surface sphérique* est une surface courbe non réglée ; tous ses points sont également distants d'un autre qui est le *centre*. 130

Une *sphère* est un corps terminé de toutes parts par la surface sphérique.

Les *rayons* d'une sphère sont des droites qui vont du centre à la surface courbe ; ils sont tous égaux.

Les *diamètres* d'une sphère sont des droites qui joignent chacune deux points de la surface courbe, en passant par le centre ; ils sont tous égaux.

Le diamètre d'une sphère est double du rayon.

188. Une surface sphérique égale le produit de 3,1416 par le quarré numérique du diamètre.

189. Une *calotte sphérique* est la surface courbe d'une portion de sphère terminée par un cercle qui en forme la base.

La hauteur d'une calotte sphérique est la plus grande distance de la face courbe à la base. 131

Une calotte sphérique égale le produit fait avec le diamètre de la sphère, le nombre 3,1416 et la hauteur.

190. Une zône sphérique est la surface courbe d'une portion de sphère terminée par deux cercles parallèles qui en sont les bases.

La hauteur d'une zône est la distance de ses bases.

Une zône se mesure comme une calotte.

SURFACES ANNULAIRES.

191. Les surfaces courbes des anneaux ronds sont des *surfaces annulaires*.

192. La surface courbe d'un annean rond égale le produit fait avec la demi-somme du plus grand diamètre et du diamètre du vide, la demi-différence de ces longueurs et le quarré de 3,1416. 132

La surface d'une pièce de bois courbe et ronde, non compris les faces des bouts, égale le produit de l'arc qui tient le milieu entre le plus grand et le plus petit, multiplié par le contour pris dans un plan perpendiculaire aux tangentes de ces arcs.

SURFACES COURBES CIRCULAIRES.

193. Une *surface courbe circulaire* peut être coupée selon des circonférences, par des plans parallèles. . . 133

Une surface courbe circulaire égale la somme des surfaces courbes des troncs de cône à bases parallèles, et d'une très-petite longueur, dont se compose le corps.

CORPS.

Les corps sont des *polyèdres* ou des *corps ronds* ou des combinaisons de ces deux espèces.

Nos Pag.

POLYÈDRES.

194. Un *polyèdre* est un corps dont toutes les faces sont planes. 154

Un *prisme* est un polyèdre dans lequel toutes les arêtes limitées à une même face, sont parallèles.

Une *pyramide* est un polyèdre dans lequel toutes les arêtes limitées à une même face, sont concourantes.

PRISMES.

195. La *base* d'un prisme est la face d'où partent les arêtes parallèles.

Un *prisme complet* a deux bases parallèles, et ses arrêtes parallèles sont égales.

Un *prisme tronqué* n'a qu'une base; ses arêtes parallèles sont inégales, mais comprises entre deux faces planes.

Les *faces latérales* d'un prisme sont celles qui vont d'une base à l'autre, ou de la base à la troncature.

Un prisme est *droit*, quand les arêtes parallèles sont perpendiculaires sur la base.

Un prisme est *oblique*, lorsque les arêtes parallèles sont inclinées sur la base.

La *hauteur* d'un prisme complet est la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure, sur la base inférieure.

La *longueur* d'un prisme égale celle d'une des arêtes parallèles.

On distingue les prismes par les noms des polygones qui forment les bases 135

Un *parallélipipède* est un prisme qui a pour base un parallélogramme.

Un *prisme rectangle* est droit et a pour base un rectangle.

Un *prisme carré* est droit et a pour base un carré.

Un *cube* est un parallélipipède dont les six faces sont des carrés.

Comparaison des prismes.

199. Le *volume* d'un corps est l'espace plein renfermé entre toutes les faces. 136

La *capacité* d'un corps creux est l'espace vide renfermé entre les parois.

La capacité se mesure comme le volume.

200. Deux prismes quelconques sont équivalens en volume, quand il y a équivalence entre les bases et égalité entre les hauteurs.

Deux prismes quelconques de même hauteur se contiennent comme leurs bases 137

N° Pag.

Deux prismes quelconques qui ont des bases équivalentes, se contiennent comme leurs hauteurs. 137

201. Deux prismes sont égaux, quand les arêtes, les faces et les coins de l'un sont de même grandeur que les parties correspondantes de l'autre. 138

Mesurage des prismes.

202. La *surface totale* d'un prisme égale la somme des bases et des faces latérales.

203. Les unités de volume ou de capacité sont des cubes et des prismes carrés.

205. Le volume d'un prisme rectangle égale le produit fait avec sa hauteur, sa largeur et son épaisseur . . . 139

209. Jauger un vase en litres, revient à le mesurer en décimètres cubes 141

211. Cuber le bois en stères, revient à le mesurer en mètres cubes. 142

215. Corder du bois de chauffage, revient en général à mesurer une superficie 143

216. Le *cube* d'un nombre est le produit fait avec ce nombre employé 3 fois. 144

Le volume d'un cube égale le cube numérique de l'arête.

217. Le volume d'un prisme quelconque égale le produit de la superficie de la base par la hauteur.

218. Le cordage d'une pile de bois de chauffage haute de 4 pieds, revient au mesurage d'une longueur.

219. Le volume d'un tronc de prisme triangulaire égale le produit de la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux trois sommets de la troncature. 145

220. Le volume d'un tronc de parallélipipède égale la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux quatre sommets de la troncature. 146

PYRAMIDES.

221. La *base* d'une pyramide est la face d'où partent toutes les arêtes concourantes.

Le *sommet* d'une pyramide est le point de rencontre de toutes les arêtes concourantes.

La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base.

Les *faces latérales* de la pyramide vont de la base au sommet; ce sont des triangles.

Une pyramide est *complète*, quand elle contient le sommet.

Une pyramide est *tronquée*, lorsqu'au lieu du sommet, c'est une face plane qui se trouve opposée à la base.

La pyramide tronquée ou le tronc de pyramide a

Nos Pag.

deux bases, quand la troncature est parallèle à la face opposée 146

Les faces latérales d'un tronc de pyramide à 2 bases, sont des trapèzes.

L'*axe* d'une pyramide est la droite qui joint le sommet au centre de la base, quand ce polygone a un centre.

Une *pyramide régulière* a pour base un polygone régulier, et son axe est perpendiculaire à cette base.

Une pyramide est *irrégulière*, lorsque sa base est un polygone irrégulier, ou que l'axe est incliné sur la base.

Toutes les arêtes concourantes d'une pyramide régulière sont égales.

On distingue les pyramides par les noms des polygones de leurs bases. 147

Comparaison des pyramides.

225. Deux pyramides triangulaires sont égales, quand leurs arêtes correspondantes ont mêmes longueurs, ou quand trois faces de l'une sont égales à trois faces de l'autre. 148

Deux pyramides régulières sont égales, lorsqu'il y a égalité entre les bases et entre les hauteurs ou 2 arêtes concourantes prises chacune sur un des corps.

Deux pyramides irrégulières sont égales, s'il y a égalité entre leurs bases et si 3 arêtes concourantes qui se suivent, ont dans l'une mêmes longueurs que leurs correspondantes dans l'autre.

226. Deux pyramides qui ont des bases de même superficie et des hauteurs égales, sont équivalentes.

Une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.

227. Deux pyramides dont les bases sont de même superficie, se contiennent comme leurs hauteurs. . . . 149

Deux pyramides de même hauteur, se contiennent comme leurs bases.

Mesurage des pyramides.

228. La *surface totale* d'une pyramide égale la somme des faces latérales et de la base.

230. Le volume d'une pyramide égale le tiers du produit de la superficie de la base par la hauteur. 150

231. Pour obtenir le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, il faut multiplier la grande base par un de ses côtés, multiplier la petite base par le côté correspondant, multiplier la différence des deux produits par la hauteur du tronc, et diviser le 3e produit par le triple de la différence des deux côtés.

N°s Pag.

CORPS RONDS.

Les corps ronds peuvent être coupés selon des circonférences, par des plans parallèles 151

COMPARAISON ET MESURAGE DES CORPS RONDS.

232. Deux cylindres ou deux cônes se contiennent comme leurs bases, s'ils ont même hauteur, et comme leurs hauteurs, si les bases sont équivalentes.

233. Le volume d'un cylindre quelconque égale le produit de sa base par sa hauteur 152

234. Le volume d'un tronc de cylindre droit qui a un axe, égale le produit de la base par cet axe ou par la moyenne de la plus grande et de la plus petite des droites de la surface courbe.

235. Le volume des parois d'un manchon cylindrique égale l'excès du grand cylindre sur le petit. 153

236. Le volume d'un cône quelconque égale le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

237. Le volume d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, se calcule comme celui du tronc de pyramide. . . 154

Le volume d'un tronc de cône droit et circulaire, à bases parallèles, égale le tiers du produit fait avec la hauteur, le nombre 3,1416 et le produit des rayons des bases ajouté à la somme de leurs quarrés.

Pour avoir le volume de la pièce de bois carré que fournira un arbre en grume, on prend les 5/48 ou le dixième de la somme des contours des bouts, mesurés à l'aide d'une ficelle; puis on multiplie le quarré du résultat par la longueur de la pièce. . . 155

238. Le volume des parois d'un manchon conique égale l'excès du grand tronc de cône sur le petit.

239. Le volume d'une sphère est le tiers du produit de la surface multipliée par le rayon.

Pour calculer le volume d'une sphère, il faut prendre les 4/3 du produit fait avec le cube du rayon et le nombre 3,1416, ou le sixième du cube du diamètre multiplié par 3,1416.

Le volume d'une paroi sphérique est l'excès du volume de la grande sphère sur la petite 156

240. Deux sphères se contiennent comme les cubes numériques de leurs rayons ou de leurs diamètres.

241. Pour cuber le volume d'une calotte sphérique, il faut, à la moitié du volume d'un cylindre de même base et de même hauteur, ajouter le volume d'une sphère dont le diamètre soit la hauteur de la calotte.

242. Pour cuber le volume d'une zône sphérique, il faut, à la moyenne des volumes de deux cylindres formés avec

Nos Pag.

les bases la hauteur de la zône, ajonter le volume d'une sphère dont le diamètre soit cette même hauteur. . . 156

243. Pour cuber un anneau rond, il faut calculer la superficie du cercle dont le diamètre est l'épaisseur de l'anneau, et la multiplier par la moyenne de la plus grande et de la plus petite circonférence.

Le volume d'un annean rond égale aussi le quart du produit fait avec la somme du plus grand et du plus petit rayon, le quarré de leur différence et le quarré du nombre 3,1416.

Le volume d'une pièce de bois courbe et ronde, terminée d'équerre par des bouts à centre, est le produit de la superficie d'un de ces bouts, multipliée par la moyenne du plus grand et du plus petit des arcs de la surface annulaire. 157

Le volume d'une pièce de bois courbe, terminée d'équerre par des polygones réguliers, est le produit de la superficie d'un des bouts, multipliée par la moyenne des arêtes courbes.

244. Dans un tonneau, le diamètre du *bouge* est celui qui aboutit au centre de la bonde.

La capacité d'un tonneau en mètres cubes, est le quart du produit fait avec la distance des fonds, le nombre 3,1416 et le quarré numérique des 2/3 du diamètre du bouge augmentés du tiers du diamètre d'un des fonds.

On peut aussi, pour calculer approximativement la capacité d'un tonneau, le considérer comme composé de deux troncs de cônes accolés par leurs grandes bases 158

DESSIN ET MESURAGE DES CORPS QUELCONQUES.

245. Pour obtenir le volume d'un corps quelconque, tronqué, qui a des arêtes parallèles, perpendiculaires à la base, il faut le décomposer en prismes tronqués, triangulaires ou rectangles, et faire la somme de ces prismes.

246. Le plan d'un corps sans nom géométrique, doit présenter les contours que formeraient des plans horizontaux qui couperaient ce corps à différentes hauteurs. 159

Sur l'élévation, les contours horizontaux sont des lignes droites dont les extrémités, jointes par une ligne, forment le profil du corps 160

247. Le volume d'un corps quelconque est la somme de tous les prismes droits, triangulaires ou rectangles, complets ou tronqués, dont le dessin du corps fournit les bases et les arêtes 161

LEVER D'UN BATIMENT.

248. Lever un bâtiment revient à dessiner, d'après une

N°s Pag.

échelle, des triangles semblables à des triangles mesurés. 162

Le plan d'un bâtiment comprend le plan des caves, celui du rez-de-chaussée et celui de chaque étage.

Le plan des caves passe par l'horizontale qui fait l'arête inférieure de l'orifice d'un soupirail. . . 163

Le plan du rez-de-chaussée est le prolongement du dessus des tablettes des fenêtres inférieures ; on y représente tous les objets coupés et ceux qui restent au-dessous : les jardins, les cours et tout ce qu'elles renferment.

L'escalier qui va d'un étage à l'autre, est dessiné tout entier sur le plan de l'étage inférieur . . . 164

Le plan de chaque étage se fait absolument de la même manière que celui du rez-de-chaussée. 165

Faire une *coupe verticale* dans un bâtiment, c'est en supprimer une partie située en avant d'un plan vertical convenablement dirigé, et dessiner l'élévation de ce qui est visible dans la partie restante.

Les coupes verticales d'un bâtiment donnent les hauteurs de toutes les parties intérieures.

Ce sont les coupes verticales qui montrent la disposition et les dimensions des pièces de la charpente. 166

L'élévation d'un bâtiment est le dessin d'une des faces extérieures 167

On fait quelquefois plusieurs élévations ; mais souvent on n'en fait qu'une, et alors c'est la façade principale qui est dessinée.

Les dimensions horizontales de l'élévation sont toutes fournies par les plans, et les dimensions verticales, par les coupes.

Lorsque l'étendue d'un plan force d'adopter une très-petite échelle, les coupes et l'élévation se font sur une échelle plus grande, ordinairement double.

MESURAGE DES POIDS.

249. Le poids d'un corps égale le produit du poids de l'unité de volume multiplié par le volume. . . 168

Le poids de l'unité de volume est ce qu'on appèle le *poids spécifique* du corps.

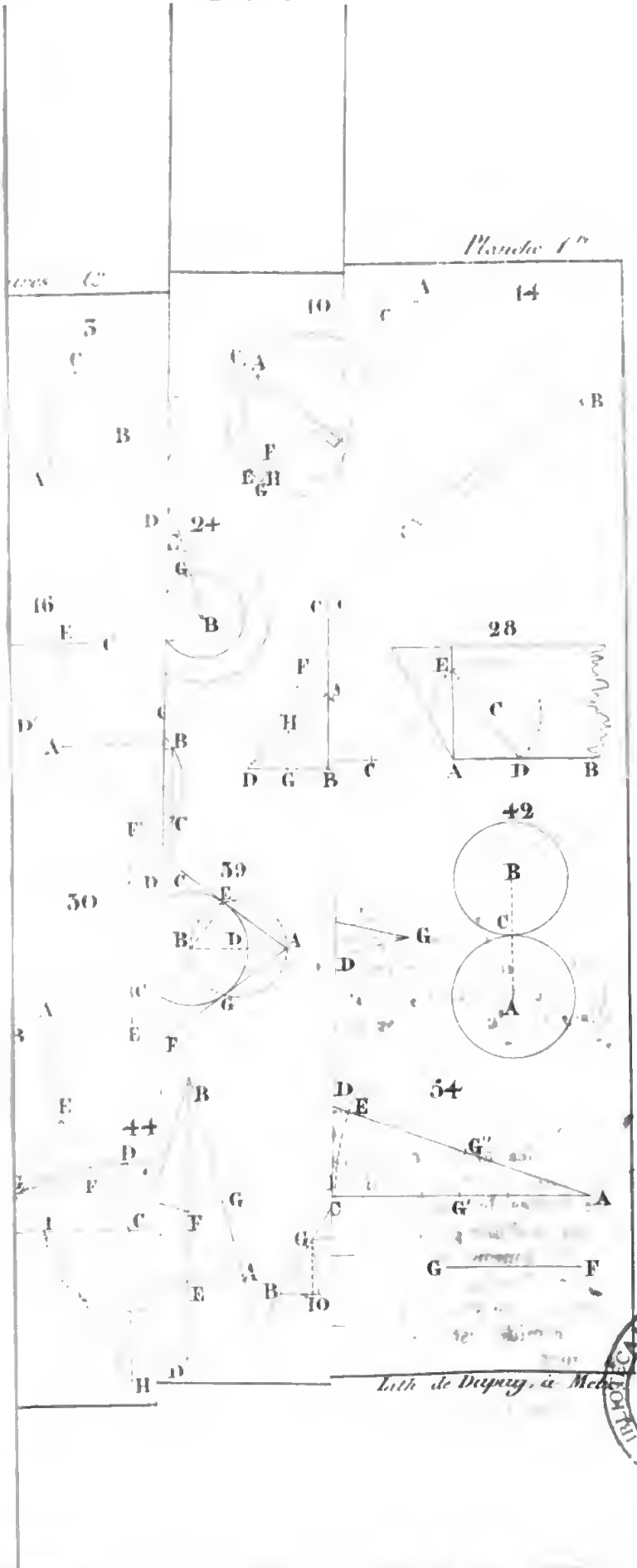
L'unité de volume adoptée pour le poids spécifique, est le décimètre cube.

L'unité des poids spécifiques est le kilogramme, poids d'un décimètre cube ou d'un litre d'eau très-pure.

250. Pour déterminer le poids d'un corps en kilogrammes, il faut le cuber en décimètres cubes, et multiplier le poids spécifique, par le nombre obtenu. 169

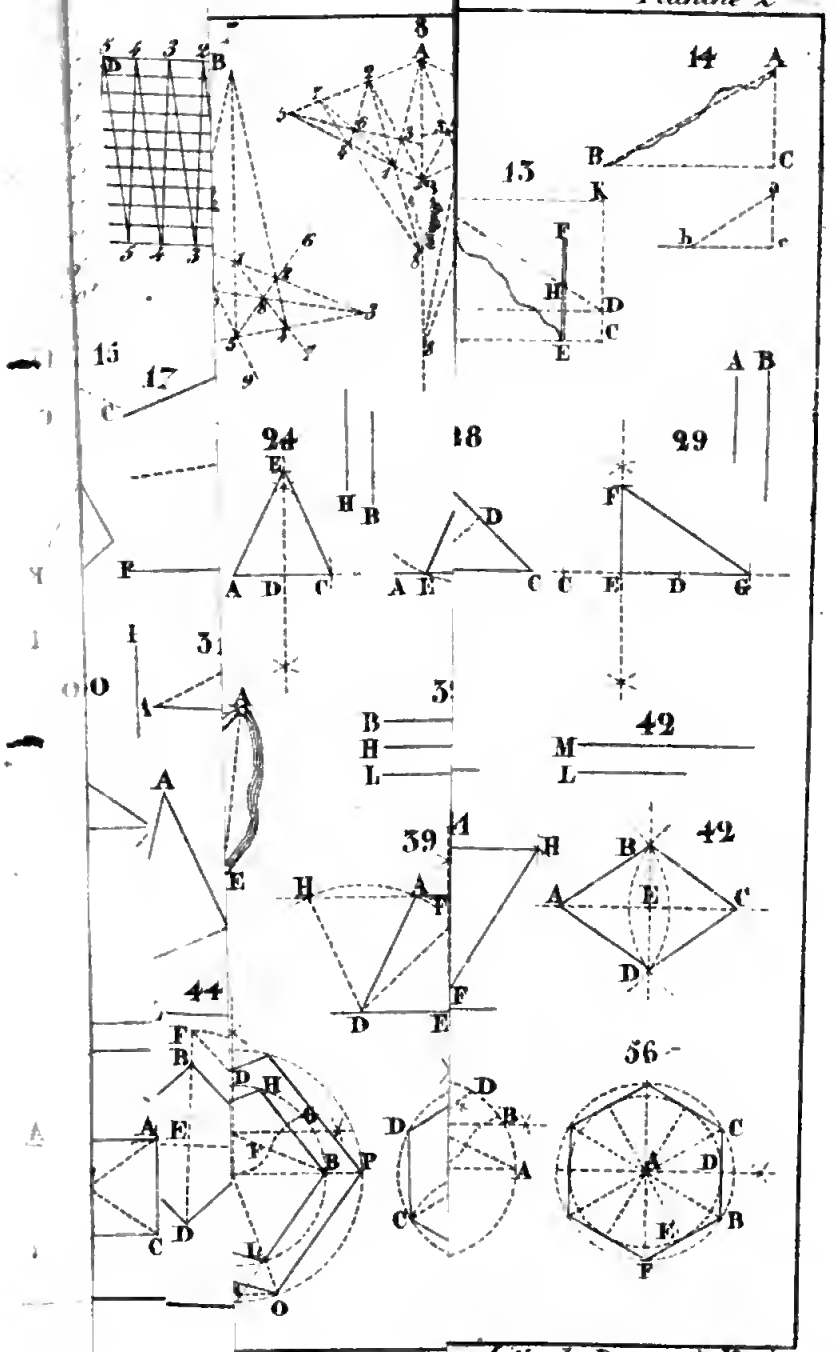
FIN.

NAZIONALE "VITTORIO" NAPOLI
616370
Biblioteca Nazionale NAPOLI



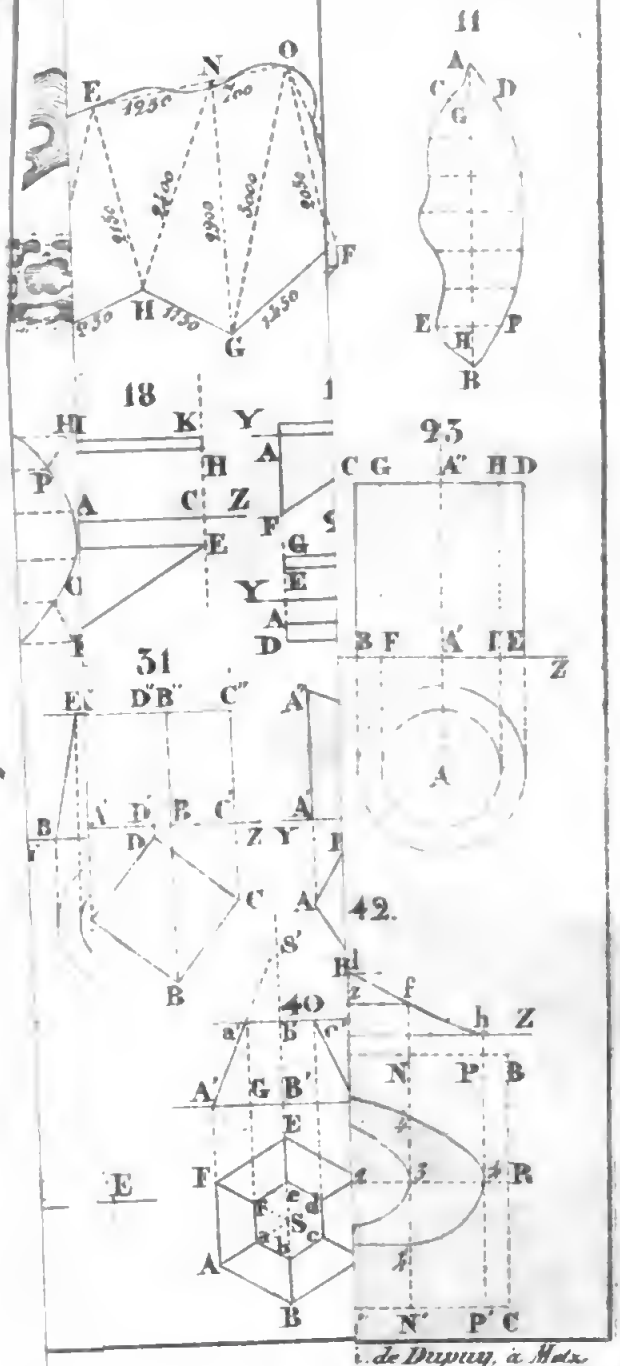
BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III
NAPOLI

Planche 2ème



Lith. de Dupuy à Metz

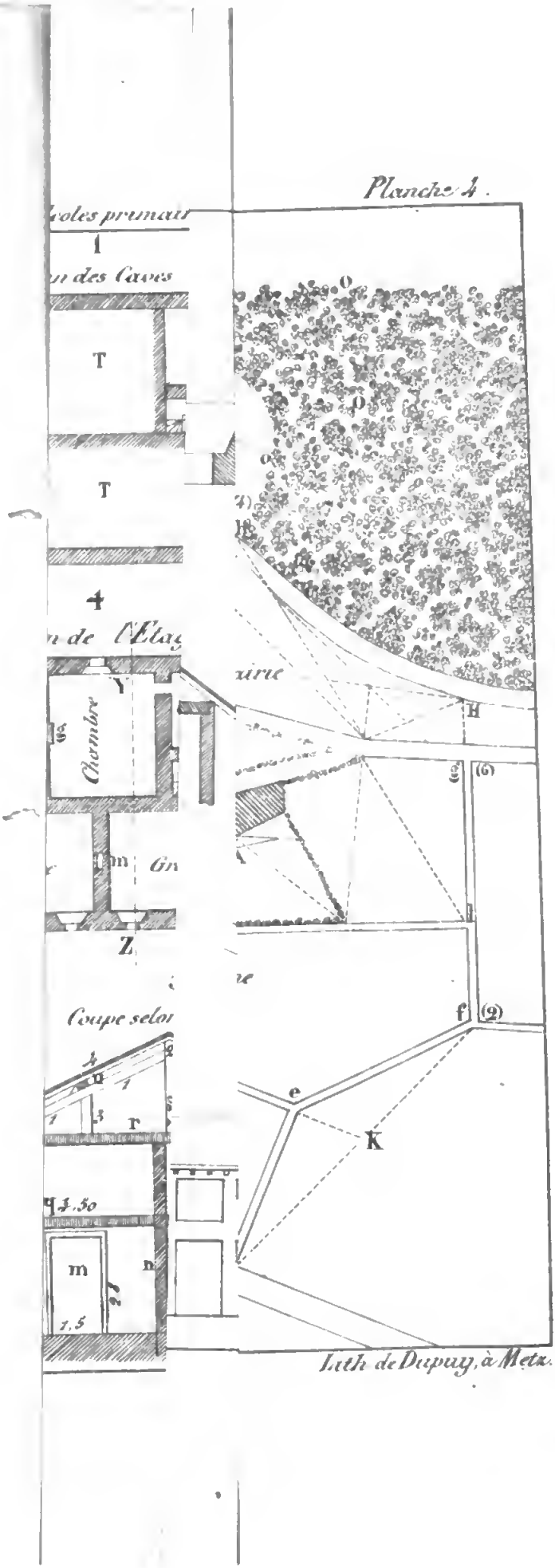
BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



i. de Dupuy, à Metz.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

80

BIBLIOTECA